République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Université El Manar



المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بالمنار

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs – El Manar

Kamel MEHDI



Classes Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs

1ères & 2èmes années

Options : MP, PC & PT

Juin 2009

AVANT PROPOS

Les problèmes proposés dans le présent document constituent des sujets d'examens et des devoirs surveillés que j'ai proposés avec mes collègues enseignants aux étudiants de l'I.P.E.I. de Mateur (1996-2002), de l'I.P.E.I. El Manar (2002-2009) et de F.S.T (2003-2009).

KAMEL MEHDI

TABLE DES MATIERES

ETUDE DUN DISPOSITIF ANTI-REBOND

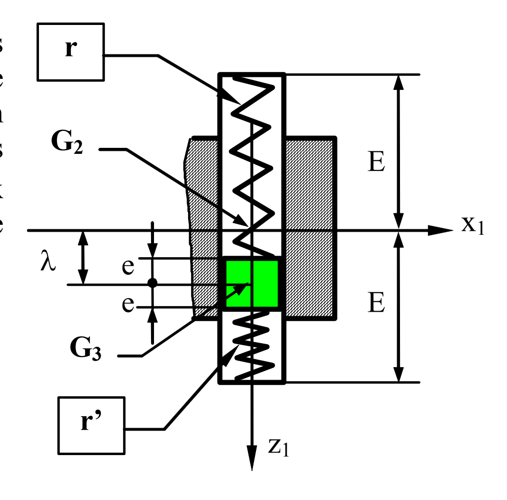
La figure 1 schématise un système expérimental d'essai du dispositif anti-rebond d'une suspension d'automobile à roue tirée.

Ce système est composé des éléments suivants :

- un bâti-support (S_0) fixe dans le laboratoire terrestre d'essai. $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_0). L'axe $(O,\vec{z}_0)$ étant vertical descendant. Tous les mouvements sont plans, parallèles à $(O,\vec{z}_0,\vec{x}_0)$,
- un bras de suspension (S_1), de centre d'inertie $\mathbf{G_1}$ et de masse $\mathbf{m_1}$, articulé sur (S_0) par une liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{y}_0)$. $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)$ est le repère lié à (S_1) tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_1)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=\theta$ et $\overrightarrow{OG_1}=l\,\vec{x}_1$.
- une barre de torsion τ, de **masse négligeable**, montée entre (S_0) et (S_1). On donne le torseur d'action mécanique de τ sur (S_1) : $\left\{\tau_{\tau\to S_1}\right\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ -c(\theta-\beta)\,\vec{y}_0\end{matrix}\right\}$ où c et β sont des constantes positives.
- une roue indéformable (S_2), de masse $\mathbf{m_2}$, de rayon **R** et de centre d'inertie $\mathbf{G_2}$, articulé sur (S_1) par une liaison pivot parfaite d'axe $(G_2,\vec{y}_0)$. $R_2(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_0,\vec{z}_2)$ est le repère lié à (S_2) tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_2)=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=\varphi$ et $\overrightarrow{OG_2}=h\,\vec{x}_1$.
- une masselotte (S_3), de masse $\mathbf{m_3}$ et un centre d'inertie $\mathbf{G_3}$, articulée sur (S_1) par une liaison glissière parfaite de génératrices parallèles à $\vec{z}_1$, G_3 étant mobile sur l'axe $(G_2,\vec{z}_1)$. On pose $\overrightarrow{G_2G_3}=\lambda\,\vec{z}_1$.
- deux ressorts de compression r et r', identiques montés entre (S_1) et (S_3), chacun d'eux ayant une masse négligeable, une raideur *k*, une longueur libre l_0. On suppose que $l_0>2(E-e)$, donc r et r' sont toujours comprimés. L'action mécanique de chacun des deux ressorts r et r' sur la masselotte (S_3) en tout point de l'axe $(G_3,\vec{z}_1)$, (au point G_3 par exemple) est donnée par :

$$\left\{\tau_{r\to S_3}\right\}=\left\{\begin{matrix}-k(E+\lambda-e-l_0)\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{G_3}$$

$$\left\{\tau_{r'\to S_3}\right\}=\left\{\begin{matrix}k(E-\lambda-e-l_0)\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{G_3}$$



- un plateau vibrant (S_4), articulé sur (S_0) par une liaison glissière parfaite de génératrices parallèles à $\vec{z}_0$ et en contact ponctuel en P avec (S_2). Le mouvement de (S_4) est commandé par une manivelle (S_5) (articulé sur (S_0) par une liaison pivot parfaite d'axe $(C,\vec{y}_0)$), entraînée en rotation par un moteur (non représenté).

  On considère le repère $R_4(H,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié à (S_4) et le repère $R_5(C,\vec{x}_5,\vec{y}_0,\vec{z}_5)$ lié à (S_5) tel que $(\vec{x}_0,\vec{x}_5)=(\vec{z}_0,\vec{z}_5)=\alpha$.

  La liaison (S_5-S_4) est réalisée par un tourillon de (S_5), d'axe $(A,\vec{y}_0)$, qui reste dans une rainure horizontale, d'axe $(H,\vec{x}_0)$ creusée dans (S_4). On pose $\overrightarrow{CA}=b\,\vec{x}_5$. (b est une constante positive).

On suppose, dans toute l'étude, que le contact en P entre la roue (S_2) et le plateau vibrant (S_4) est maintenu avec un roulement sans glissement, et que l'action de contact de (S_4) sur (S_2) est de la forme $\left\{\tau_{S_4 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix} T\,\vec{x}_0 + N\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P$.

Les matrices d'inerties des solides (S_1), (S_2) et (S_3) sont connues et sont définies par :

$$\left[I_O(S_1)\right] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)} ; \left[I_{G_2}(S_2)\right] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_0,\vec{z}_2)} ; \left[I_{G_3}(S_3)\right] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)}$$

Le torseur d'action mécanique de S_0 sur S_1 est de la forme : $\left\{\tau_{S_0 \to S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{01}\,\vec{x}_1 + Z_{01}\,\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_O$.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_5) par rapport au solide (S_0) au point C $\left\{\mathcal{V}(S_5/S_0)\right\}_C$. En déduire le vecteur vitesse au point A : $\vec{V}(A \in S_5/S_0)$.
2) Donner la trajectoire du point A du solide (S_5) dans son mouvement par rapport à (S_4) et la trajectoire du point A du solide (S_4) dans son mouvement par rapport à (S_0).
3) En exprimant le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in S_5/S_0)$ dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et d'après la loi de décomposition du mouvement, donner les vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in S_5/S_4)$ et $\vec{V}(A \in S_4/S_0)$.
4) Déterminer alors le torseur cinématique du mouvement du solide (S_4) par rapport au solide (S_0) au point P : $\left\{\mathcal{V}(S_4/S_0)\right\}_P$.
5) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_1) par rapport au solide (S_0) au point O : $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_O$. En déduire $\vec{V}(G_1 \in S_1/S_0)$ et $\vec{V}(G_2 \in S_1/S_0)$.
6) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0) au point G_2 : $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_{G_2}$. En déduire $\vec{V}(P \in S_2/S_0)$.
7) Calculer et exprimer la vitesse de glissement $\vec{V}(P \in S_2/S_4)$ dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. En déduire deux relations scalaires traduisant la condition de roulement sans glissement au point P entre (S_2) et (S_4).
8) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_0) au point G_3 : $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_{G_3}$.

Partie II : Etude cinétique et énergétique.

On considère le système mobile $\Sigma = \left\{S_1, S_2, S_3\right\}$.

1) Déterminer le torseur cinétique au point O du solide (S_1) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
2) Déterminer le torseur cinétique au point G_2 du solide (S_2) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
3) Déterminer le torseur cinétique au point G_3 du solide (S_3) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).

4) Calculer l'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

5) Faire le bilan et écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ.

6) Faire le bilan et écrire les torseurs des actions mécaniques intérieures appliquées au système Σ.

7) Calculer la puissance des efforts extérieurs à Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et la puissance des inter-efforts entre les solides de Σ.

8) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

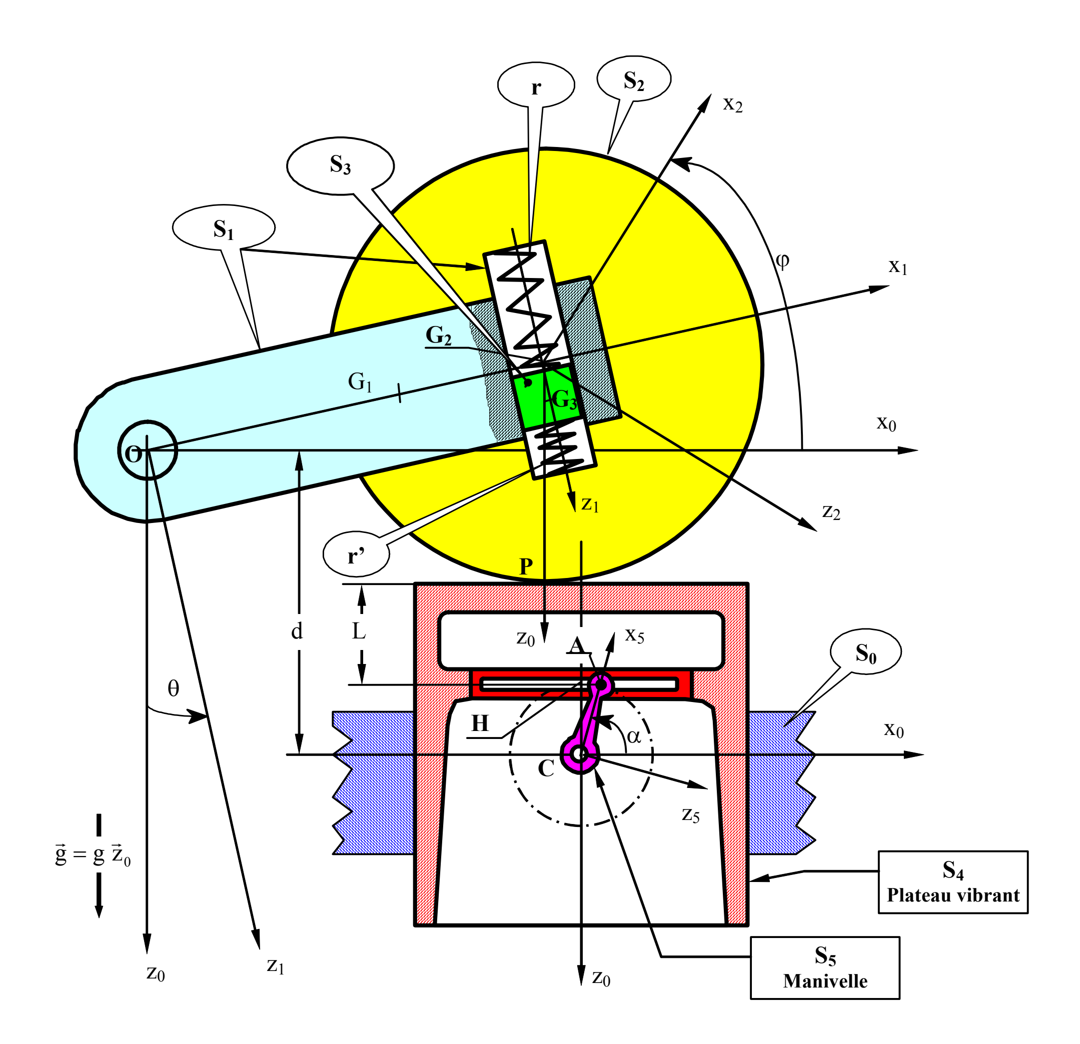


Figure 1

Etude du mouvement d'un Manège

On se propose d'étudier le mouvement d'un manège schématisé par la figure 1.

Le repère $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, lié à la terre et au bâti **(S₀)** est supposé galiléen. L'axe $(O_0,\vec{z}_0)$ est vertical ascendant.

Le système étudié est constitué :

- d'un solide (**S₁**), de masse **m₁** et de centre d'inertie **O₁**, en liaison pivot glissant d'axe $(O_0,\vec{z}_0)$ avec le bâti **(S₀)**. Le repère lié à (**S₁**) est $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$. On pose comme paramètres de mouvement de **(S₁)** par rapport à **(S₀)** : $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=\psi$ et $\overrightarrow{O_0O_1}=z\,\vec{z}_0$.

  Le matrice d'inertie de (**S₁**) est définie au point O_1 par :

$$\left[I_{O1}(S_1)\right]=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & C_1\end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}.$$

- d'une roue (**S₂**), de masse **m₂**, de centre d'inertie **O₂** et de rayon **R**, en liaison pivot glissant d'axe $(O_1,\vec{x}_1)$ avec (**S₁**). Le repère lié à (**S₂**) est $R_2(O_2,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. On pose comme paramètres de mouvement de (**S₂**) par rapport à (**S₁**) : $(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)=\varphi$ et $\overrightarrow{O_1^*O_2}=x\,\vec{x}_1$ avec $\overrightarrow{O_1O_1^*}=d\,\vec{x}_1$ (**d** est une constante positive donnée).

  Le matrice d'inertie de (**S₂**) est définie au point **O₂** par :

$$\left[I_{O_2}(S_2)\right]=\begin{bmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & C_2\end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,-,-)}.$$

  La roue **(S₂)** est en contact ponctuel en **I** avec le plan horizontale $P_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ et est munie d'un pneumatique de paramètre de dérive **D** (constante donnée).

- d'une nacelle (**S₃**) de masse **m₃**, en liaison pivot d'axe $(O_3,\vec{z}_0)$ avec le solide **(S₁)**, par l'intermédiaire d'un bras auquel elle est liée rigidement. Le repère lié à (**S₃**) est $R_3(O_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$. On pose comme paramètres de mouvement de (**S₃**) par rapport à (**S₁**) : $(\vec{x}_1,\vec{x}_3)=(\vec{y}_1,\vec{y}_3)=\theta$ et $\overrightarrow{O_1^*O_3}=h\,\vec{z}_0$ (**h** est une constante positive donnée).

Par ailleurs :

- un moteur **m₀₁** est monté entre **(S₀)** et **(S₁)**, il délivre un torseur couple tel que : $\left\{\mathcal{T}(m_{01}\to S_1)\right\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_m\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$.
- un moteur **m₁₃** est monté entre **(S₁)** et **(S₃)**, il délivre un torseur couple tel que : $\left\{\mathcal{T}(m_{13}\to S_3)\right\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C'_m\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$.
- un ressort de traction-compression, de raideur **k** et de **masse négligeable**, est placé entre **(S₁)** et **(S₂)** et son action s'annule avec **x**.

On envisage l'étude sous les hypothèses suivantes :

<u>Hypothèses :</u>

H.1. Le contact de **(S_2)** avec le plan horizontal **P_0** est toujours maintenu au point I. Dans ce cas le paramètre de mouvement **z(t) est égal à une constante R** (rayon de la roue).

H.2. Les liaisons entre les solides (**S_0-S_1**), (**S_1-S_2**) et (**S_2-S_3**) sont supposées parfaites.

H.3. La liaison (**S_2-P_0**) est modélisée de la façon suivante :

- de point de vue cinématique il y a non glissement longitudinal : $\vec{V}(I \in S_2 / P_0) \cdot \vec{y}_1 = 0$
- de point de vue dynamique par son torseur d'action mécanique $\left\{\mathcal{T}(P_0 \to S_2)\right\}_I = \left\{\begin{matrix}\vec{F}_{0/2} \\ \vec{m}_{0/2}(I)\end{matrix}\right\}_I$ qui est modélisé de la façon suivante :

  ⇒ on suppose que le contact est purement ponctuel : $\vec{m}_{0/2}(I) = \vec{0}$,

  ⇒ le coefficient de frottement entre (**S_2**) et (**P_0**) est *f*,

  ⇒ on relie l'effort transversal de l'action de contact à la dérive δ du pneumatique : $X_{02} = \vec{F}_{0/2} \cdot \vec{x}_1 = D\,\delta$ (*D constante > 0*),

  (La dérive étant l'angle que fait la vitesse du point géométrique de contact dans son mouvement par rapport au repère R_0 avec le plan de la roue (figure 2). Elle est due à la déformation du pneumatique et elle permet d'expliquer qu'un véhicule puisse avoir une trajectoire différente de celle due au braquage des roues - d'où le développement des pneus taille basse).

$$\delta = [\vec{y}_1, \vec{V}(I/R_0)] = -\text{arctg}\left[\frac{\vec{V}(I/R_0)\cdot\vec{x}_1}{\vec{V}(I/R_0)\cdot\vec{y}_1}\right]$$

L'action du plan (**P_0**) sur la roue (**S_2**) est alors donnée par le torseur :

$$\left\{\mathcal{T}(P_0 \to S_2)\right\}_I = \left\{\begin{matrix}X_{02}\vec{x}_1 + Y_{02}\vec{y}_1 + Z_{02}\vec{z}_0 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_I .$$

H.4. La masse de (**S_3**) est ponctuelle **m_3** en **G_3** tel que $\overrightarrow{O_3G_3} = l\,\vec{x}_3$ (**l** est une constante positive donnée).

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

I.1. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S_1)** par rapport au solide **(S_0)** au point O_1 puis au point O_3 : $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_{O_1}$ et $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_{O_3}$.

I.2. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S_2)** par rapport au solide **(S_0)** au point O_2 : $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_{O_2}$. En déduire la vitesse de glissement au point I du solide **(S_2)** par rapport au plan **(P_0)** lié au solide **(S_0)** : $\vec{V}(I \in S_2/S_0)$.

I.3. Donner une relation entre φ et ψ qui traduit la condition du non glissement longitudinal au point I de (**S_2**) par rapport au plan (**P_0**).

I.4. Calculer la vitesse du point géométrique de contact I dans son mouvement par rapport à (**S_0**) : $\vec{V}(I/S_0)$.

I.5. Exprimez, d'après la loi de comportement de la liaison (**P_0-S_2**), l'effort transversal **X_{02}** en fonction du paramètre de mouvement $x, \dot{x}, \dot{\psi}, d$ et de la constante D.

I.6. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S₃)** par rapport au solide **(S₁)** puis par rapport au solide **(S_0)** au point **G_3** : $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\right\}_{G_3}$ et $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_{G_3}$.

I.7. Calculer l'accélération du point **G_3** de **(S_3)** au cours de son mouvement par rapport à **(S_0)** : $\vec{\Gamma}(G_3/S_0)$.

Partie II : Etude dynamique et énergétique d'un état stationnaire

On étudie dans toute cette partie l'état stationnaire défini par : $\begin{matrix} x = cte = x_0 \\ \dot{\psi} = cte = \omega \\ \dot{\varphi} = cte = \Omega \\ \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0 \end{matrix}$.

Par ailleurs, **on donne,** sous forme intrinsèque pour cet état stationnaire, l'accélération du point **G_3** dans son mouvement par rapport à **(S_0)** : $\vec{\Gamma}(G_3/S_0) = -d\,\dot{\psi}^2\,\vec{x}_1 - l\left(\dot{\theta}+\dot{\psi}\right)^2\,\vec{x}_3$.

On adopte la notation suivante pour la représentation du torseur d'action mécanique d'un solide **(S_i)** sur un solide **(S_j)** en un point **A_i** dans une base locale de la liaison (à préciser):

$\left\{\mathcal{T}(S_i \to S_j)\right\}_{A_i} = {}_{A_i}\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{\text{Base locale}}$. Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = -g\,\vec{z}_0$.

II.1. Quel est la valeur de l'effort transversal X_{02} pour cet état stationnaire.

II.2. Donner le torseur cinétique et dynamique du mouvement du solide (**S_1**) par rapport au solide **(S_0)** au point **O_1**.

II.3. Donner le torseur cinétique et dynamique du mouvement du solide (**S_2**) par rapport au solide **(S_0)** au point **O_2**. (**Conseil :** exprimer les résultats des deux torseurs dans la base du repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$).

II.4. Donner le torseur cinétique et dynamique du mouvement du solide (**S_3**) par rapport au solide **(S_0)** au point **G_3**. Puis calculer le moment dynamique (S_3) par rapport au solide **(S_0)** au point **O_3**. (On rappelle que **(S_3)** est assimilé à une masse ponctuelle m_3 au point G_3).

II.5. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur **(S_1)** et donner leur torseur somme au point O_1: $\left\{\mathcal{T}(\overline{S}_1 \to S_1)\right\}_{O_1}$. (Exprimer les composantes du torseur dans la base du repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$).

II.6. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur **(S_2)** et donner leur torseur somme au point O_2: $\left\{\mathcal{T}(\overline{S}_2 \to S_2)\right\}_{O_2}$. (Exprimer les composantes du torseur dans la base du repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$).

II.7. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur **(S_3)** et donner leur torseur somme au point O_3: $\left\{\mathcal{T}(\overline{S}_3 \to S_3)\right\}_{O_3}$. (Exprimer les composantes du torseur dans la base du repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$).

II.8. En appliquant le P.F.D. au solide **(S_3)** dans son mouvement par rapport à **(S_0)**, écrire les six équations scalaires déduites des deux théorèmes généraux. (On numérote ces équations de 1 à 6).

II.9. En appliquant le P.F.D. au solide **(S$_2$)** dans son mouvement par rapport à **(S$_0$)**, écrire les six équations scalaires déduites des deux théorèmes généraux. (On numérote ces équations de 7 à 12).

II.10.En appliquant le P.F.D. au solide **(S$_1$)** dans son mouvement par rapport à **(S$_0$)**, écrire les six équations scalaires déduites des deux théorèmes généraux. (On numérote ces équations de 13 à 18).

II.11.A partir des 18 équations scalaires obtenues ci-dessus, déterminer les actions de liaison **(S$_1$-S$_3$), (S$_1$-S$_2$), (S$_0$-S$_2$), (S$_0$-S$_1$)**,la valeur de **x_0** ainsi que les couples moteur C_m et C'_m.

II.12.On se propose d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

- Calculer la puissance galiléenne développée par toutes les actions mécaniques (intérieures et extérieures au système).
- Calculer l'énergie cinétique galiléenne du système.
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'état stationnaire.

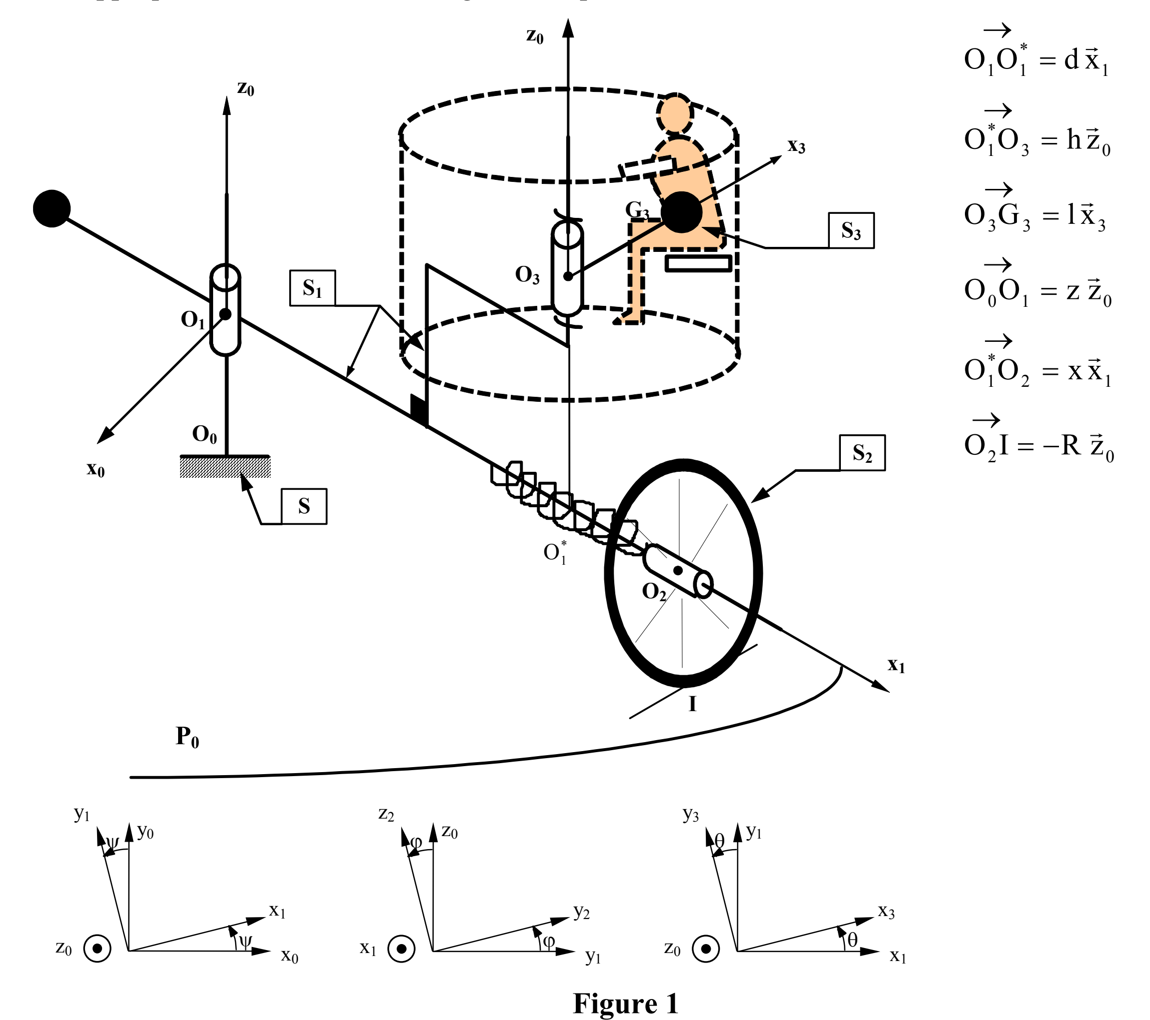
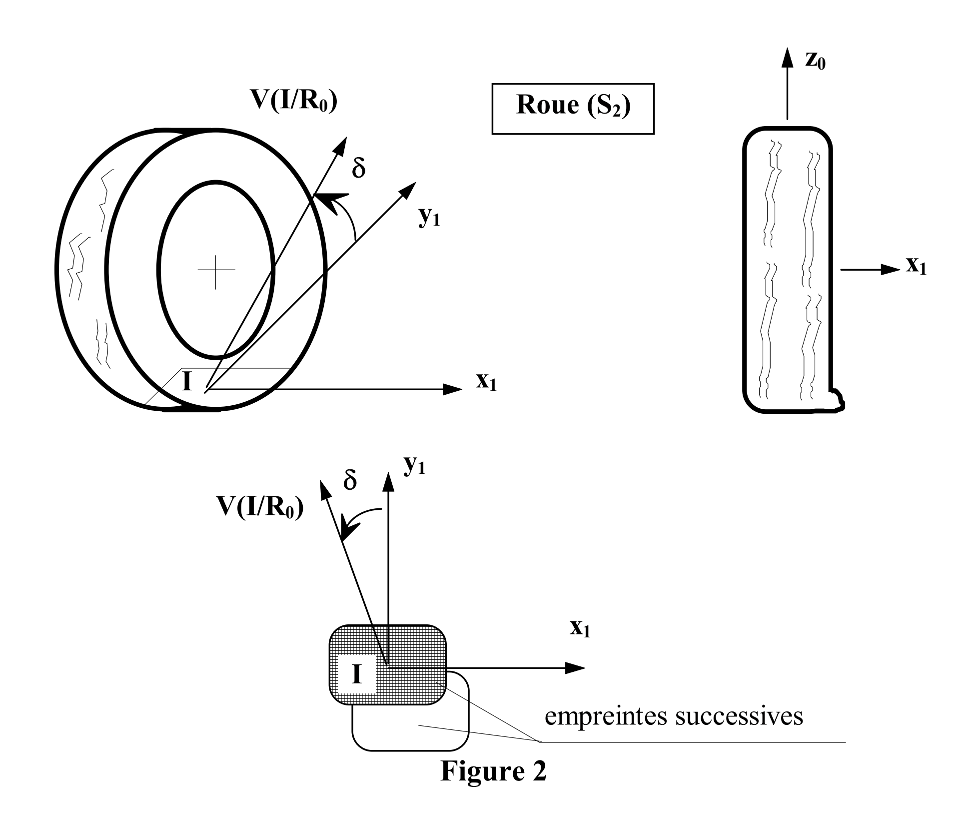


Figure 1


V(I/R0)
Roue (S2)
z0
δ
y1
x1
I
x1
δ
y1
V(I/R0)
x1
I
empreintes successives
Figure 2

ETUDE D'UNE BROCHE MULTIPLICATRICE

Les figures 1 et 2 représentent le schéma cinématique d'une broche multiplicatrice adaptable sur fraiseuse, machine à pointer, perceuse ou aléseuse dont la vitesse de rotation est généralement insuffisante pour donner la vitesse de coupe rationnelle aux fraises couteaux de petit diamètre.

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au corps (S_0) de la broche. Les arbres (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O,\vec{y}_0)$ avec le corps (S_0).

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y}_0,\vec{z})$ un repère lié à l'arbre moteur (S_1). On pose $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x})=(\vec{z}_0,\vec{z})$, avec $\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\omega_e$ (ω_e = constante > 0).

L'arbre (S_1) entraîne en rotation trois sphères (S_3), homogènes, pleines, de masse ***m*** chacune, de rayon ***a***, disposées à 120° les unes des autres (figure 2).

Le centre O_1 de la sphère (S_3) décrit un cercle de centre O et de rayon ***r*** , tel que $\overrightarrow{OO_1}=r\,\vec{x}$.

La sphère (S_3) roule sans glisser aux points B et C de deux surfaces coniques liées au corps (S_0) et communique son mouvement à l'arbre récepteur (S_2) en roulant sans glisser aux point A et D sur celui-ci. On pose $\vec{\Omega}(S_2/R_0)=\omega_s\,\vec{y}_0$. Les points A, B, C, D sont les quatre sommets d'un rectangle, comme indiqué sur la figure 1. Notons $(\vec{x},\overrightarrow{DB})=(\overrightarrow{AC},\vec{x})=\alpha$.

L'arbre moteur (S_1) est en contact ponctuel avec (S_3) en I tel que $\overrightarrow{O_1I}=a\,\vec{z}$.

Soit *f* le coefficient de frottement aux points A, B, C, D et I entre les différents solides en contact. On définit l'action mécanique de l'arbre (S_2) sur la sphère (S_3), au niveau du point A, par le torseur:

$$\left\{\tau_A(S_2\to S_3)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}N_A\,\vec{n}_A+T_A\,\vec{z}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$$

$\vec{n}_A$: Vecteur unitaire dirigé du point A vers le centre O_1 de la sphère (S_3) (alors $N_A\geq 0$).

Les autres torseurs d'action mécanique sur (S_3), aux points B, C, D et I, sont définis d'une façon analogue. L'action mécanique de la pesanteur étant négligée. On suppose que les composantes normales en B et en C sont égales, ainsi que les composantes tangentielles ($N_B=N_C$ et $T_B=T_C$).

On donne:

- ω_e = 157.08 rad/s (1500 tr/mn).
- Puissance fournie à l'arbre moteur (S_1): P = 750 W.
- *r* = 48 mm; *a* = 32.5 mm; α = 14°; *f* = 0.12; *m* = 1.121 kg.

Travail demandé

1) Calculer la vitesse du point O_1 par rapport au repère R_0.
2) Montrer que $\vec{\Omega}(S_3/R_0)=\omega\,\vec{y}_0$ où ω est une constante à déterminer en fonction de ω_e, *r*, *a* et α. Ecrire alors au point O_1 le torseur cinématique du mouvement de (S_3) par rapport au repère R_0.
3) Déterminer le rapport de multiplication de la broche $\frac{\omega_s}{\omega_e}$.
4) Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la sphère (S_3) dans son mouvement par rapport à l'arbre moteur (S_1): $\vec{V}(I\in S_3/S_1)$.
5) Déterminer au point O_1 le torseur cinétique puis le torseur dynamique de la sphère (S_3) dans son mouvement par rapport au repère R_0.

6) Déterminer au point O_1 le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur la sphère (S_3): $\left\{\tau_{\overline{S}_3 \to S_3}\right\}_{(O_1,\vec{x},\vec{y}_0,\vec{z})}$.

7) Ecrire les équations scalaires déduites du principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère (S_3) dans son mouvement par rapport au repère R_0, en projection sur $\vec{x},\vec{y}_0,\vec{z}$.

8) Déterminer la composante N_I de la résultante générale du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_3) $\left\{\tau_I(S_1 \to S_3)\right\}$, en fonction de la puissance P, ω_e, *r*, *a* et *f*.

9) Déterminer les composantes tangentielles T_A et T_B des résultantes générales des torseurs d'action mécanique $\left\{\tau_A(S_2 \to S_3)\right\}$ et $\left\{\tau_B(S_0 \to S_3)\right\}$.

10) Déterminer la valeur minimale de N_B pour qu'il y ait roulement sans glissement aux points A, B, C, D entre les solides en contact.

11) La puissance perdue par frottement au contact de la sphère (S_3) et l'arbre moteur (S_1) est $P_f = T_I\,\vec{x}\cdot\vec{V}(I \in S_3/S_1)$. Déterminer alors le rendement η du mécanisme ($\eta = \dfrac{P-3|P_f|}{P}$).

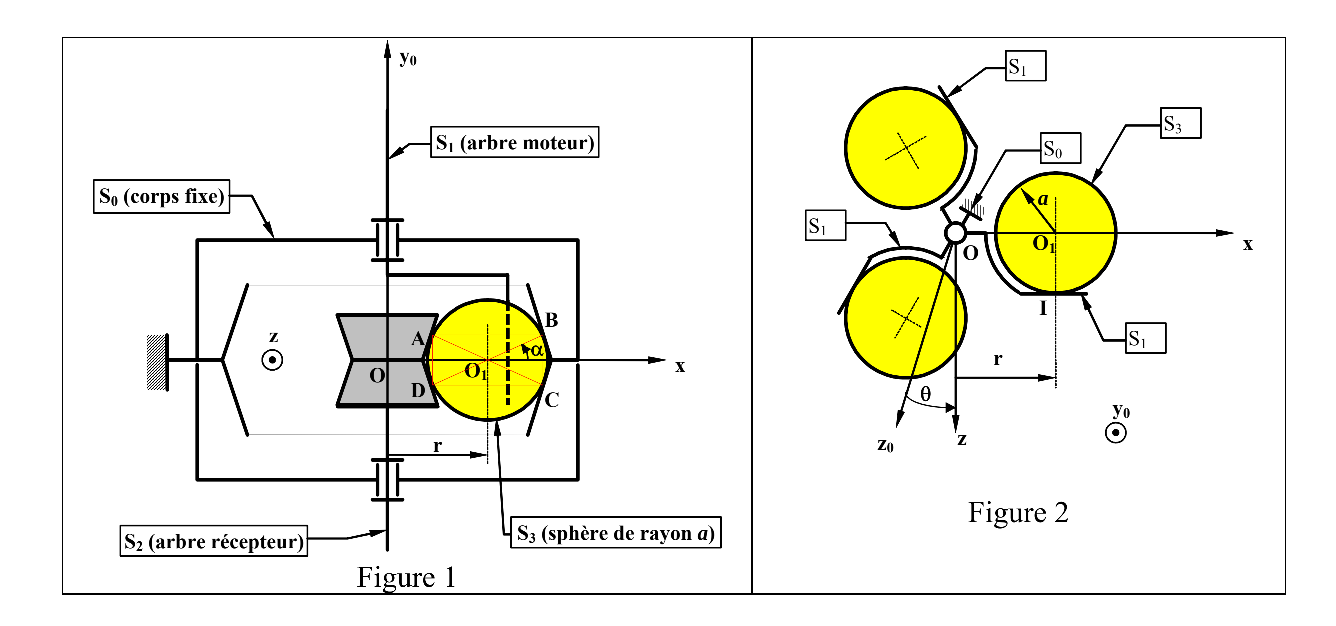


Figure 1 Figure 2

ETUDE D'UNE REMORQUE MONO-ROUE

On se propose d'étudier le mouvement de la remorque mono-roue attaché à un véhicule d'essai.

Le repère $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, lié à la terre est supposé galiléen. L'axe $(O_0,\vec{y}_0)$ est vertical ascendant.

Le système étudié est constitué (Fig 1) :

- d'un croisillon (**S₁**), de masse négligeable, à axes perpendiculaires qui permet de lier la remorque au véhicule tracteur. Le repère lié à (**S₁**) est $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$. Le mouvement de (**S₁**) par rapport à (**S**) est une rotation autour de $(O,\vec{z}_0)$. On pose $(\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) = \psi$,
- d'un châssis (**S₂**) de masse M et de centre d'inertie G. Le repère lié à (**S₂**) est $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)$. Le mouvement de (**S₂**) par rapport à (**S₁**) est une rotation autour de $(O,\vec{y}_1)$. On pose $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_0,\vec{z}_2) = \theta$, $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_2$ $(a = cte > 0)$.
- d'une roue (**S₃**) de masse m de centre d'inertie H. Le repère lié à (**S₃**) est $R_3(H,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$. Le mouvement de (**S₃**) par rapport à (**S₂**) est une rotation autour de $(H,\vec{z}_2)$. On pose $(\vec{x}_2,\vec{x}_3) = (\vec{y}_1,\vec{y}_3) = \varphi$, $\overrightarrow{OH} = h\,\vec{x}_2$ $(h = cte > 0)$.

On envisage l'étude du mouvement de lacet (**zigzag**) de la remorque lors du freinage du véhicule tracteur sous les hypothèses suivantes :

<u>Hypothèses :</u>

H.1. La piste (**P₀**) est plane, horizontale et située à la distance R du plan $(O_0,\vec{z}_0,\vec{x}_0)$ (R est le rayon de la roue). Le véhicule d'essai est animé d'un mouvement de translation rectiligne : le point O de l'attache **(S)** est mobile sur $(O_0,\vec{x}_0)$ à vitesse $\vec{V}(O/R_0) = -v(t)\,\vec{x}_0$ ($\forall$ t ; v(t) > 0)

H.2. On note par I la projection orthogonale du point H sur le plan **(P₀)** ($\overrightarrow{HI} = -R\,\vec{y}_0$ avec R le rayon de la roue). I est le point de contact entre (**S₃**) et (**P₀**).

H.3. La liaison (**S₃-P₀**) est modélisée de point de vue cinématique par le non glissement longitudinal : $\vec{V}(I \in S_3 / P_0)\,.\,\vec{x}_2 = 0$.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

L'équation de liaison traduisant les hypothèses H1 impose que $\vec{\Omega}(S_1/S) = \vec{0}$. Par suite $\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi =$ constante = 0 (θ se définit alors comme le paramètre de lacet : $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_2)$)

I.1. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide (S₂) par rapport au repère R₀ au point O puis au point H : $\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\}_O$ et $\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\}_H$.

I.2. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide (S₃) par rapport au repère R₀ au point H puis au point I : $\{\mathcal{V}(S_3/R_0)\}_H$ et $\{\mathcal{V}(S_3/R_0)\}_I$.

I.3. Traduire la condition du non glissement longitudinal au point I de (**S₃**) par rapport au plan (**P₀**).

I.4. Calculer la vitesse relative du point géométrique I dans son mouvement par rapport à (**S₃**). En déduire sa vitesse absolue dans son mouvement par rapport au repère R₀.

Partie II : Calcul d'Inertie

La roue (S₃) est modélisée par l'association des solides suivants, supposés tous homogènes (figure 2-a) :

* Un anneau, noté par (S_{31}), de centre d'inertie H, d'épaisseur négligeable, de masse m_1 et de rayon R.
* Un disque, noté par (S_{32}), de centre d'inertie H, d'épaisseur négligeable, de masse m_3 et de rayon r.
* Un ensemble de 8 tiges identiques $(T_i)_{i=1..8}$, uniformément répartis autour de l'axe $(H,\vec{z}_2)$ qui relient l'anneau (S_{31}) au disque (S_{32}). Chaque tige a un centre d'inertie G_i, une longueur L et une masse m_t.

Questions

II.1. Donner, au point H et dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$, la matrice d'inertie de l'anneau (S_{31}).

II.2. Donner, au point H et dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$, la matrice d'inertie du disque (S_{32}).

II.3. Donner, au point G_1 et dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$, la matrice d'inertie de la tige (T_1). L'axe de la tige (T_1) est supposé confondu avec $(H,\vec{x}_3)$ (figure 2-b)

II.4. Déduire de la question 3, la matrice d'inertie de la tige (T_1) au point H dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$.

II.5. Déduire de la question 4, la matrice d'inertie, au point H et dans une base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_2)$, d'une tige (T), (identique aux 8 tiges) et d'axe $(H,\vec{u})$ tel que $(\vec{x}_3,\vec{u})=(\vec{y}_3,\vec{v})=\alpha$.

II.6. Déduire de la question 5, la matrice d'inertie de la tige (T), au point H dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$.

II.7. Ecrire alors la matrice d'inertie, au point H dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$, des tiges $(T_i)_{i=2..8}$, pour $\alpha=(i-1)\dfrac{\pi}{4}$.

II.8. Donner la matrice d'inertie de l'ensemble de la roue (S_3) au point H dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$.

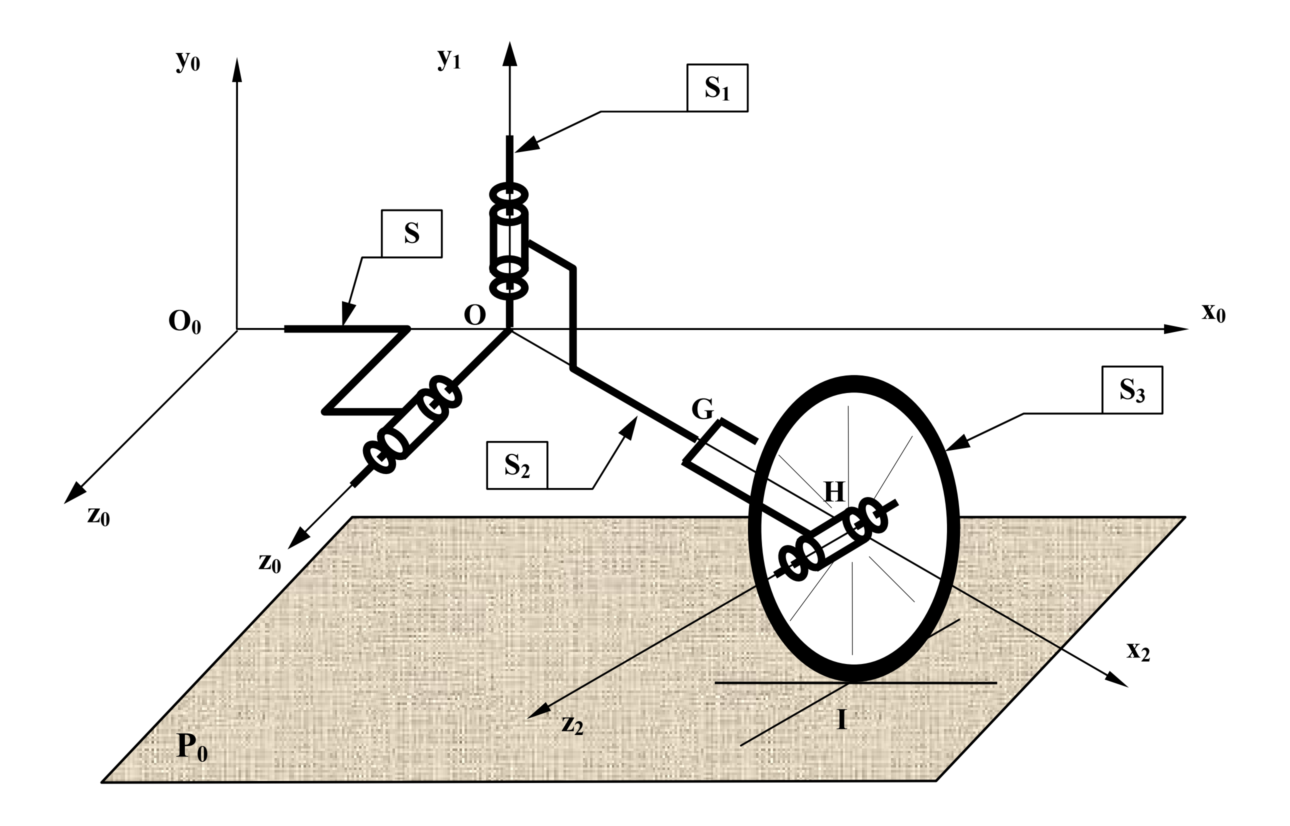


Figure 1

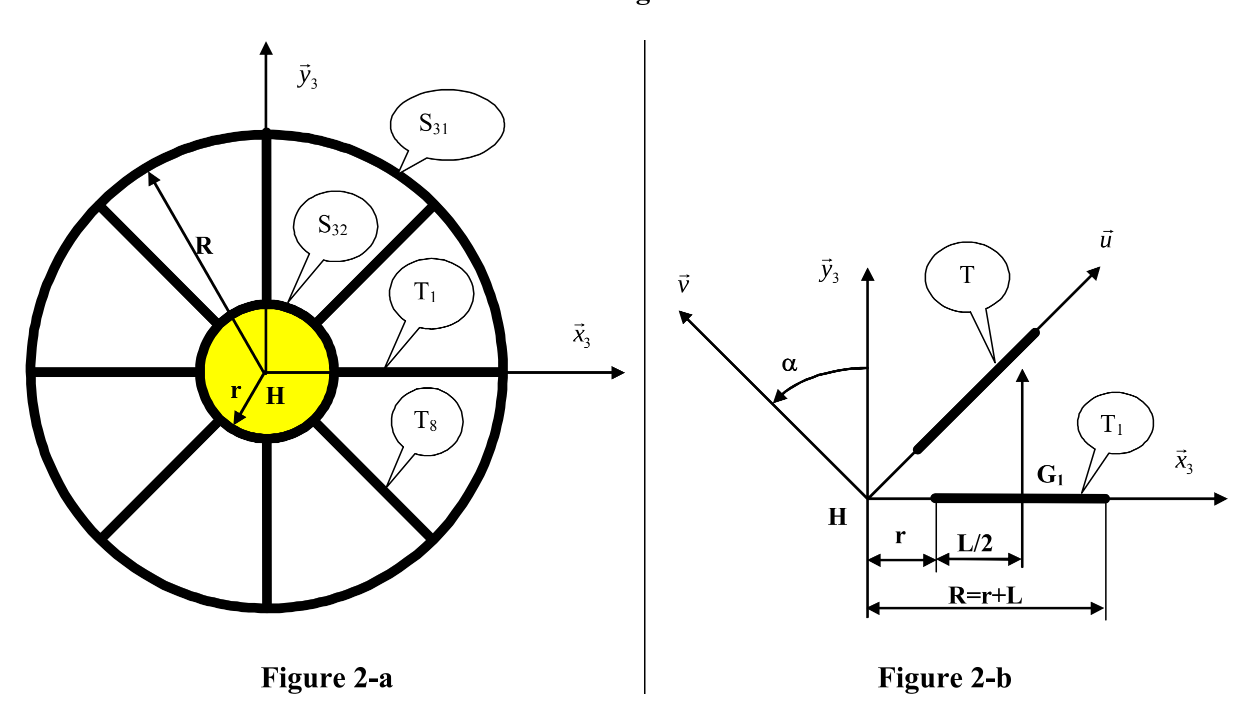


Figure 2-a

Figure 2-b

ETUDE D'UN MELANGEUR

On se propose de faire l'étude d'un mélangeur (figure 1) utilisé pour mixer certains produits liquide (peintures, vernis, etc.).

Tous les repères introduits ont une base orthonormée directe.

Le système est constitué des solides suivants :

- **Bâti (S_0)** : $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le repère lié au bâti (**S_0**), considéré galiléen. L'axe $(O,\vec{z})$ est vertical ascendant.
- **Arbre (S_1) (vis sans fin à un filet à droite)** en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x})$ avec (S_0). Le repère lié à (S_1) est $R_1(B,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ tel que $(\vec{y},\vec{y}_1)=(\vec{z},\vec{z}_1)=\alpha(t)$. La masse de ($S_1$) **est supposée négligeable**.
- **Roue dentée (S_2) à n dents** en liaison pivot d'axe $(O,\vec{y})$ avec (S_0). L'entraînement en rotation de (S_2) par rapport à (S_0) est assuré par la vis (S_1). « *(S_1) et (S_2) constituent un système roue et vis sans fin* ». $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y},\vec{z}_2)$ est le repère lié à (S_2) tel que $(\vec{x},\vec{x}_2)=(\vec{z},\vec{z}_2)=\beta(t)$. La masse de ($S_2$) **est supposée négligeable**.

  Le système d'engrenage de la roue (S_2) avec la vis (S_1) impose la relation suivante : $\beta=\dfrac{\alpha}{n}$ (on suppose que $\beta=0$ lorsque $\alpha=0$).

- **Sphère (S_3) de rayon a** en liaison rotule avec (S_2) de centre C tel que $\overrightarrow{OC}=R\,\vec{z}_2$ (R est une constante positive). La masse de (S_3) **est supposée négligeable**.

  On désigne par **I** le point de contact de (S_3) avec (S_2) défini par $\overrightarrow{IC}=a\,\vec{z}_2$.

- **Bras mélangeur (S_4)** en liaison pivot glissant d'axe CD avec (S_3). D est point fixe sur l'axe $(O,\vec{y})$. On pose $\overrightarrow{OD}=L\,\vec{y}$ (L est une constante positive). Soit $R_3(D,\vec{x}_2,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ le repère tel que $\vec{z}_3$ soit dirigé suivant $\overrightarrow{DC}$. On pose $(\vec{y},\vec{y}_3)=(\vec{z}_2,\vec{z}_3)=\gamma$; (γ est un angle constant) et $\overrightarrow{DC}=\lambda\,\vec{z}_3$.

  (♣***Attention***♣ : le repère R_3 n'est pas lié à (S_3))

  Soit $R_4(D,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_3)$ le repère lié à (S_4). Dans ce repère, le centre d'inertie ***G*** de (S_4) est défini par $\overrightarrow{DG}=-b\,\vec{y}_4-c\,\vec{z}_3$, *(b et c sont deux constantes positives)*. La matrice d'inertie de (S_4) au point D est défini par $\left[I_D(S_4)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_3)}$. On désigne par ***m*** la masse de (S_4).

- **Chape (S_5)** en liaison pivot d'axe $(D,\vec{z})$ avec (S_0). Soit $R_5(D,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z})$ un repère lié à (S_5) de manière que $\vec{x}_5$ soit confondu avec $\vec{x}_4$; ($\vec{x}_5=\vec{x}_4$). On pose $(\vec{x},\vec{x}_5)=(\vec{y},\vec{y}_5)=\theta(t)$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<+\dfrac{\pi}{2}$. Le bras mélangeur ($S_4$) est en liaison pivot d'axe $(D,\vec{x}_5)$ avec la chape (S_5). Le paramètre de mouvement est un angle ψ défini par $(\vec{y}_5,\vec{y}_4)=(\vec{z},\vec{z}_3)=\psi(t)$. La masse de ($S_5$) **est supposée négligeable**.

Dans la suite on s'intéresse au mouvement du système matériel Σ par rapport à (S_0). Σ est formé par les solides (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) et (S_5).

La vis (S_1) est entraînée en rotation par rapport au bâti (S_0) par un moteur M_1 (non représenté) en lui exerçant un torseur couple $\left\{\tau_{M_1 \to S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_m\ \vec{x} \end{matrix}\right\}$.

L'action mécanique du produit à mélanger sur le bras du mélangeur (S_4) est supposée connue et déterminée par la mécanique des fluides.

Cette action est modélisée au point D par le torseur $\left\{\tau_{\text{Produit} \to S_4}\right\} = \left\{\begin{matrix} F_x & C_x \\ F_y & C_y \\ F_z & C_z \end{matrix}\right\}_{(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_3)}$

Le champ de pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g} = -g\ \vec{z}$; g est une constante.

On note par $\left\{\tau_{S_i \to S_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix}\right\}_{(A_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)}$ le torseur d'action mécanique d'un solide (S_i) sur un solide (S_j) au centre géométrique de la liaison A_k, exprimé dans une base locale $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ de la liaison.

Toutes les liaisons sont considérées sans frottement (liaisons parfaites).

Travail demandé

Partie I : Paramétrage

1) En exprimant la fermeture géométrique de la chaîne formée des solides {S_0, S_2, S_3, S_4, S_5} et par projection suivant les trois axes du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, écrire trois équations de liaisons entre les paramètres de mouvement β, θ, ψ et λ.
2) Exprimer alors le rapport $\frac{R}{\lambda}$ en fonction des paramètres β et ψ et écrire une relation entre β et ψ en fonction du paramètre θ.
3) Exprimer de deux manières différentes les composantes du vecteur $\vec{z}_3$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ pour déduire une relation entre les paramètres β et θ en fonction de γ. Déduire alors la loi entrée sortie du système (relation entre θ et α).
4) Déduire, à partir des relations précédentes que le paramètre de mouvement λ est toujours égal à une valeur constante.

Partie II : Etude cinématique

1) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_0) au point O $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_O$. En déduire le vecteur vitesse au point C ; $\vec{V}(C \in S_2/S_0)$.
2) Déduire de la question (1) $\vec{V}(C \in S_3/S_0)$ et l'exprimer dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
3) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_5) par rapport à (S_0) au point D $\left\{\mathcal{V}(S_5/S_0)\right\}_D$.
4) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_4) par rapport à (S_0) au point D $\left\{\mathcal{V}(S_4/S_0)\right\}_D$. En déduire le vecteur vitesse au point C : $\vec{V}(C \in S_4/S_0)$.

5) En exprimant les éléments de réduction du torseur $\{\mathcal{V}(S_4/S_0)\}_C$ dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_3)$ et par décomposition du mouvement, déduire les torseurs cinématiques de (S_4) par rapport à (S_3) et de celui de (S_3) par rapport à (S_0) au point C : $\{\mathcal{V}(S_4/S_3)\}_C$ et $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_C$. Déduire que la valeur du paramètre λ est égale à une constante.

6) En exprimant $\vec{V}(C \in S_3/S_0)$, calculé dans la question (5), dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et par identification avec $\vec{V}(C \in S_3/S_0)$, calculé dans la question (2), donner les expressions des rapports des vitesses angulaires suivants: $\frac{\dot{\beta}}{\dot{\psi}}$; $\frac{\dot{\psi}}{\dot{\theta}}$ et $\frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}}$.

7) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_3) par rapport à (S_2) au point C $\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}_C$ puis exprimer les composantes de ces éléments de réduction dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_3)$.

8) Sans faire le calcul du vecteur vitesse au point I: $\vec{V}(I \in S_3/S_2)$, peut on avoir un roulement sans glissement de (S_3) par rapport à (S_2) au point I ? Expliquer pourquoi ?

Partie II : Etude dynamique et énergétique.

1) Déterminer le torseur cinétique au point D du système Σ dans son mouvement par rapport à (S_0).

2) Calculer l'énergie cinétique du système Σ au cours de son mouvement par rapport à (S_0).

3) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ.

4) Calculer la puissance des efforts extérieurs à Σ au cours de son mouvement par rapport à (S_0) et la puissance des efforts intérieurs entre les solides de Σ.

5) Par application du théorème de l'énergie cinétique au système Σ au cours de son mouvement par rapport à (S_0), déduire une expression qui donne la valeur du couple C_m, exercé par le moteur M_1 sur la vis (S_1), en fonction des paramètres de mouvement et des composantes du torseur de l'action mécanique exercée par le produit sur le bras du mélangeur (S_4).

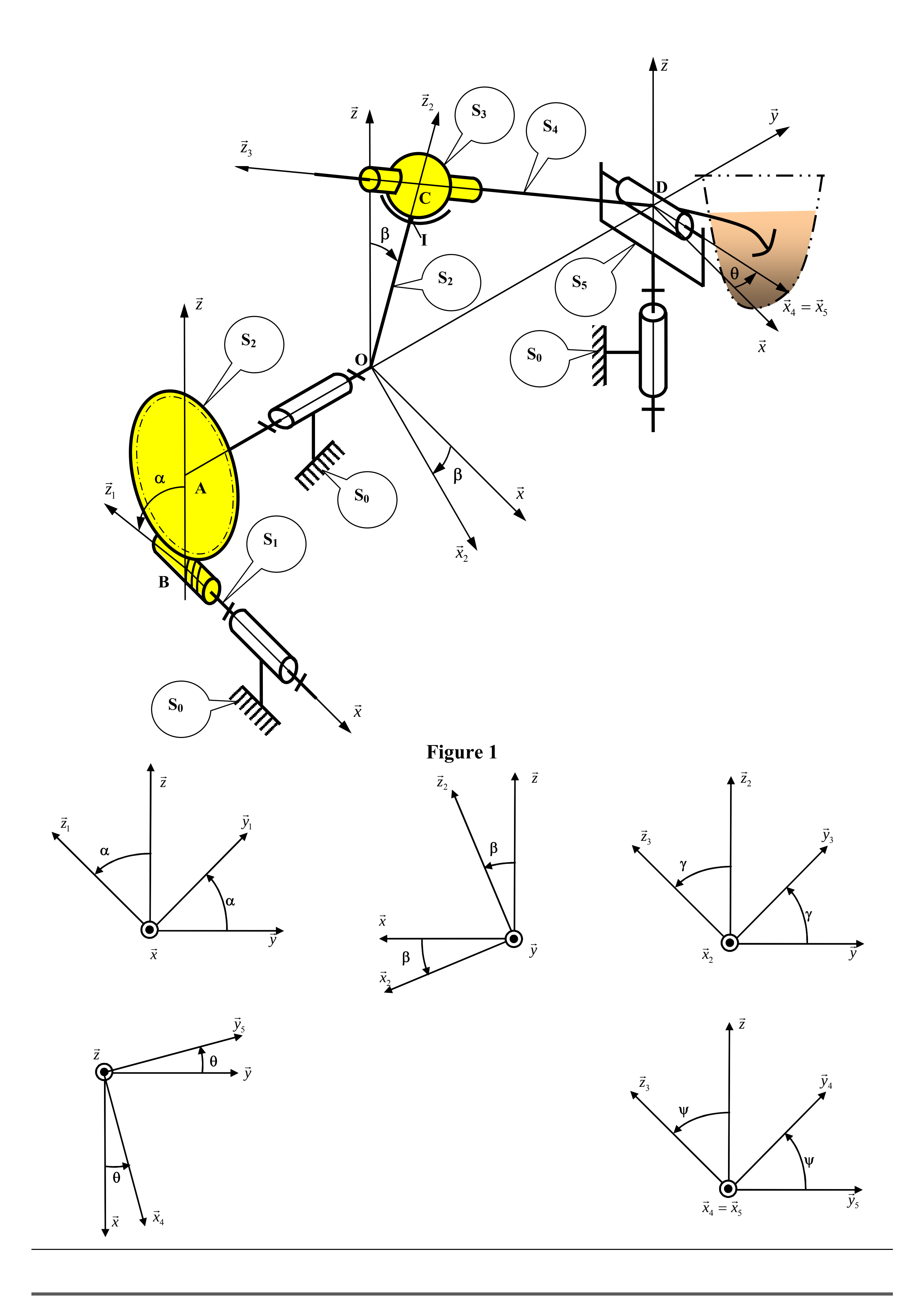

S3
S4
S2
S5
S0
S2
S0
S1
S0
C
D
I
O
A
B
α
β
θ
$\vec{z}$
$\vec{y}$
$\vec{x}$
$\vec{z}_2$
$\vec{z}_3$
$\vec{z}_1$
$\vec{x}_2$
$\vec{x}_4 = \vec{x}_5$
$\vec{y}_1$
$\vec{y}_3$
$\vec{y}_4$
$\vec{y}_5$
$\vec{x}_4$
γ
ψ

Figure 1

ETUDE D'UN ROULEMENT A BILLES

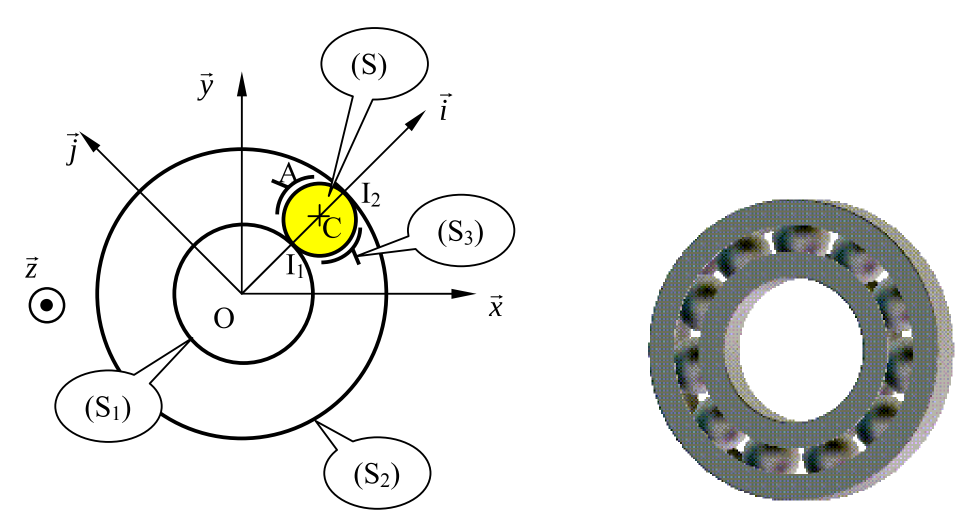


Figure 1: Représentation schématique du roulement à billes

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti (S_o) (non représenté sur la figure 1). Les deux bagues (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec (S_o).

On pose : $\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1 / R) = \omega_1 \vec{z} \\ \vec{\Omega}(S_2 / R) = \omega_2 \vec{z} \end{cases}$

La bille (S) de centre C, animée d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1, avec (S_1) et en I_2 avec (S_2). Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{z})$ un repère tel que le vecteur $\vec{i}$ ait la même direction et le même sens que le vecteur $\overrightarrow{OC}$. On pose : $\begin{cases} \overrightarrow{OI_1} = r_1 \vec{i} \\ \overrightarrow{OI_2} = r_2 \vec{i} \end{cases}$

La cage (S_3) a un mouvement de rotation d'axe $(O,\vec{z})$ par rapport à (S_o).

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1. Déterminer le torseur cinématique, au point C, du mouvement de la bille par rapport au bâti, en fonction de ω_1, ω_2, r_1, et r_2 : $\{\mathcal{V}(S/S_0)\}_C$.

2. Déterminer la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage (S_3) au point A, tel que $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}$: $\vec{V}(A \in S/S_3)$.

Partie II : Géométrie des Masses

On se propose de déterminer, par application du deuxième théorème de GULDIN, le volume de la bague (S_1) de section (E) schématisée par la figure 2.

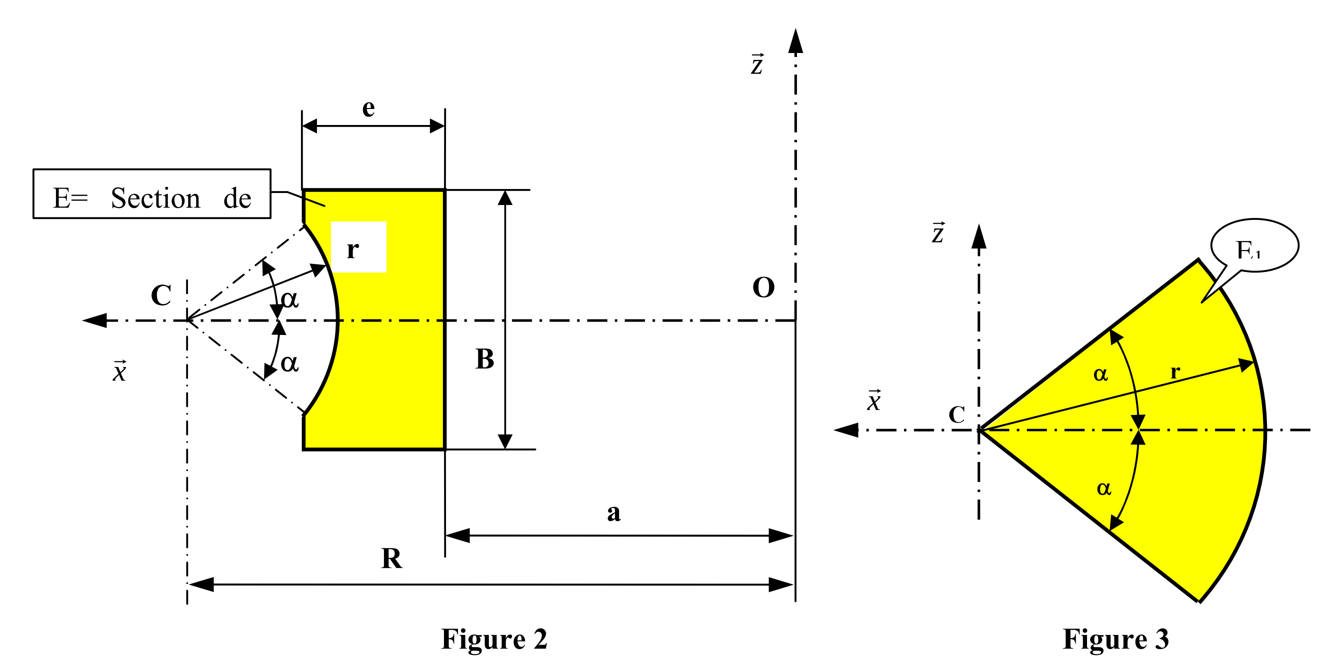


Figure 2 **Figure 3**

1. Calculer en fonction de **r** et de **α** l'aire de la surface plane homogène (E_1) schématisée par la figure 3. Déterminer alors, dans le repère $R_1(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, les coordonnées du centre d'inertie $\mathbf{G_1}$ de E_1.

2. Déterminer, dans le repère $R_1(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, les coordonnées du centre d'inertie **G** de la surface plane homogène E.

3. Calculer alors, par application du deuxième théorème de GULDIN, le volume V de la bague (S_1)

ETUDE D'UN VENTILATEUR

Le système mécanique à étudier est un ventilateur donné par la figure 1

Ce système est composé de cinq solides :

- un socle (S_0),
- une armature pivotante (S_1) de **masse nulle**,
- le stator du moteur (S_2) de masse m_2 et de centre d'inertie G_2,
- le rotor du moteur (S_3) sur lequel sont montés les pales du ventilateur. (S_3) a une masse m_3 et un centre d'inertie G_3,
- une manivelle de commande du balayage (S_4) de **masse nulle**.

On considère les repères de mouvement suivants :

- $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au solide (S_0),
- $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)$ lié au solide (S_1) tel que le mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) est une rotation autour de l'axe $(O,\vec{y}_0)$. On pose $(\vec{z}_0,\vec{z}_1)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=\alpha$ avec $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,
- $R_2(O,\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ lié au solide (S_2) tel que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une rotation autour de l'axe $(O,\vec{x}_1)$. On pose $(\vec{y}_0,\vec{y}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=\beta$ avec $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$. Le centre d'inertie de (S_2) est défini par $\overrightarrow{G_2O}=a_2\vec{z}_2$ (avec a_2 une constante positive) et sa matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est $\left[I_O(S_2)\right]=\begin{bmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & C_2\end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$. H_2 est le point de (S_2) défini par $\overrightarrow{H_2O}=h\vec{z}_2$, h est une constante positive.
- $R_3(O,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$ lié au solide (S_3) tel que le mouvement de (S_3) par rapport à (S_2) est une rotation autour de l'axe $(O,\vec{z}_2)$. On pose $(\vec{x}_1,\vec{x}_3)=(\vec{y}_2,\vec{y}_3)=\varphi$. Le centre d'inertie de (S_3) est définie par $\overrightarrow{OG_3}=a_3\vec{z}_2$ (avec a_3 une constante positive) et sa matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)$ est $\left[I_O(S_3)\right]=\begin{bmatrix}A_3 & 0 & 0\\ 0 & A_3 & 0\\ 0 & 0 & C_3\end{bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_2)}$.

  $S_2\cup S_3$ est un moteur électrique alimenté par du courant alternatif. Le solide (S_3) est entraîné en rotation par rapport à (S_2) par application d'un couple moteur $C_{23}\,\vec{z}_2$. C_{23} impose $\varphi=\omega\ t$ **(**$\omega=\dot{\varphi}$ **<u>est une constante positive donnée)</u>**.
- $R_4(O,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$ lié au solide (S_4) tel que le mouvement de (S_4) par rapport à (S_0) est une rotation autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$. On pose $(\vec{x}_0,\vec{x}_4)=(\vec{y}_0,\vec{y}_4)=\Psi$.

  B_4 est le point de (S_4) défini par $\overrightarrow{OB_4}=-l\vec{z}_0+b\vec{x}_4$ (l et b sont deux constantes positives). La liaison entre S_2 et S_4 est linéaire annulaire : H_2 reste sur l'axe $(B_4,\vec{z}_0)$ et (S_2) peut

tourner autour du point H_2. Le torseur d'action mécanique de S_4 sur S_2 est de la forme : $\left\{\tau_{S_4 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{42}\ \vec{x}_0 + Y_{42}\ \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{H_2}$

Le solide (S_4) est entraîné en rotation par rapport à (S_0) par un moteur électrique $\mathcal{M}_{04}$ de masse nulle (non représenté sur la figure) : $\left\{\tau_{\mathcal{M}_{04} \to S_4}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_{04}\ \vec{z}_0 \end{matrix}\right\}$.

C_{04} impose $\psi = \Omega\, t$ **($\Omega = \dot{\psi}$ <u>est une constante positive donnée</u>)**. Le torseur d'action mécanique de S_0 sur S_4 est de la forme : $\left\{\tau_{S_0 \to S_4}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{04}\ \vec{x}_0 + Y_{04}\ \vec{y}_0 + Z_{04}\ \vec{z}_0 \\ L_{04}\ \vec{x}_0 + M_{04}\ \vec{y}_0 \end{matrix}\right\}_O$.

Les actions de l'air sur le ventilateur sont connues : $\left\{\tau_{air \to S_3}\right\} = \left\{\begin{matrix} -F_r\ \vec{z}_2 \\ -C_r\ \vec{z}_2 \end{matrix}\right\}_O$, F_r et C_r (constantes positives fonctions de ω) étant déterminées par la mécanique des fluides.

Toutes les liaisons entre les solides sont supposées parfaites.

<u>Travail demandé</u>

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_0) au point O : $\left\{\mathcal{V}(S_3 / S_0)\right\}_O$.
2) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_4) au point O ; $\left\{\mathcal{V}(S_2 / S_4)\right\}_O$ puis au point H_2 $\left\{\mathcal{V}(S_2 / S_4)\right\}_{H_2}$.
3) "Le point H_2 reste sur l'axe $(B_4, \vec{z}_0)$" se traduit par deux équations scalaires de liaison. Lesquelles? Ecrire alors de nouveau le torseur $\left\{\mathcal{V}(S_2 / S_4)\right\}_{H_2}$ et faire une conclusion.

Partie II : Etude dynamique

On considère le système mobile $\Sigma = \left\{S_2, S_3, S_4\right\}$.

Afin de simplifier les expressions, on note par $(\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi})$ les composantes des vecteurs vitesses instantanées de rotation des solides $(S_i)_{i\,=\,2,\,3}$ ***exprimées dans la base du repère lié au solide (S_i)*** et par $(\dot{\omega}_{xi}, \dot{\omega}_{yi}, \dot{\omega}_{zi})$ leurs dérivées par rapport au temps.

1) Déterminer le torseur cinétique et dynamique au point O du solide (S_2) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
2) Déterminer le torseur cinétique et dynamique au point O du solide (S_3) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
3) Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ et écrire le torseur équivalent à ces actions au point O : $\left\{\tau_{\overline{\Sigma} \to \Sigma}\right\}_O$

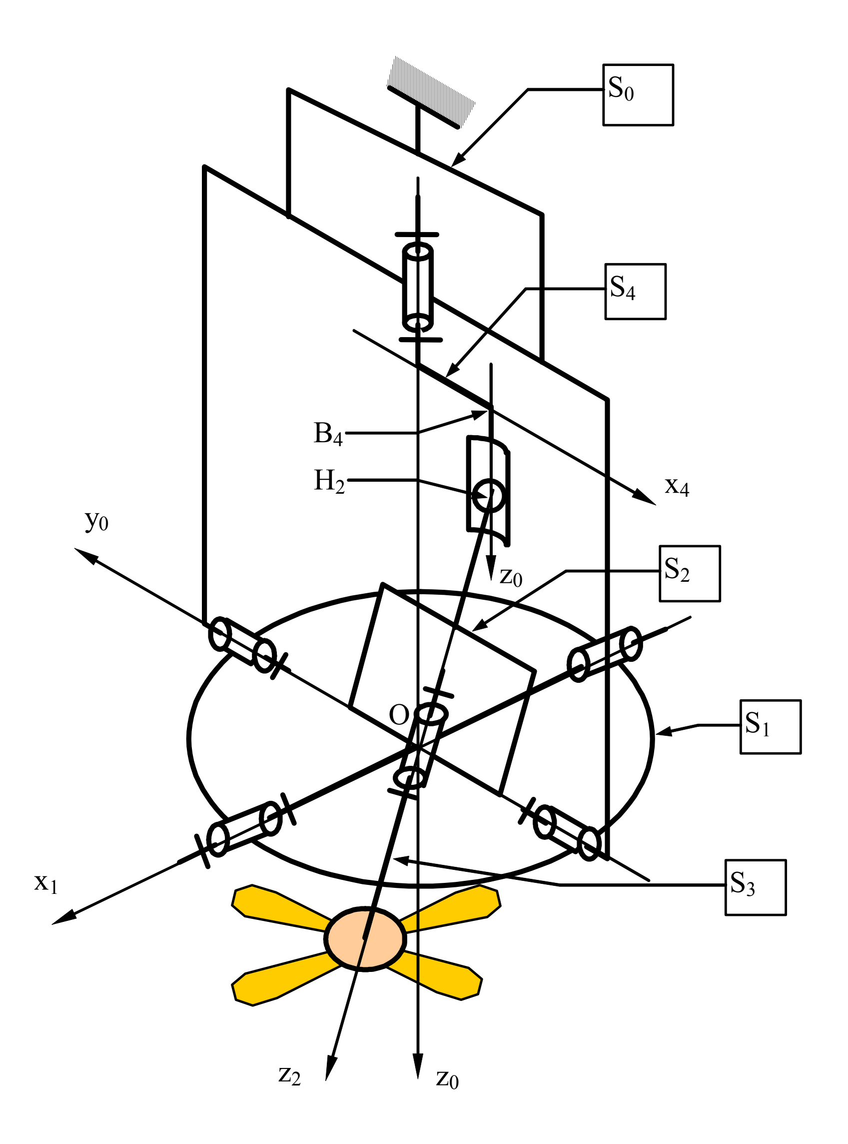
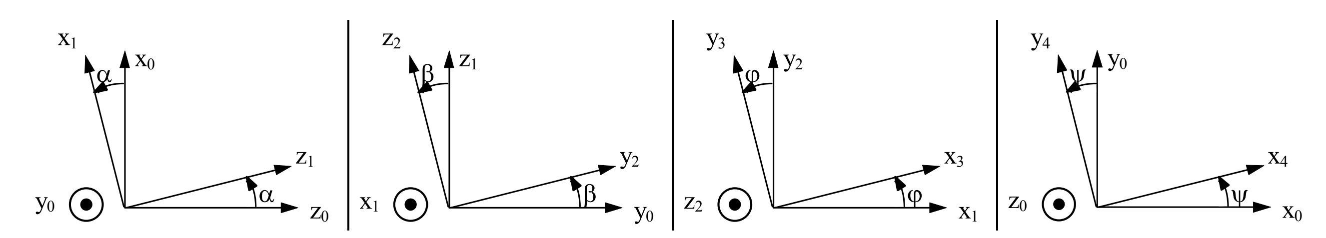


Figure 1



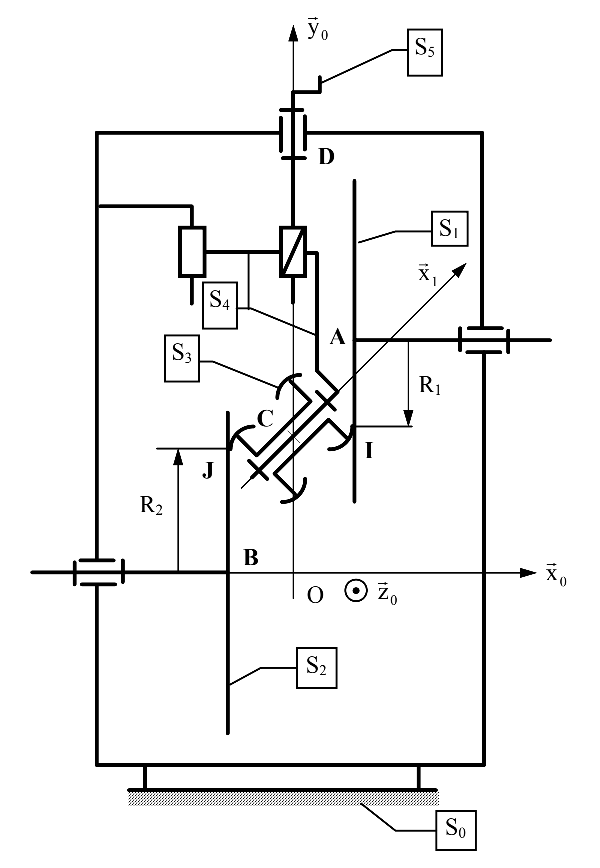
Positions relatives des bases des repères

ETUDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE A GALET

La figure 1 représente le schéma cinématique du variateur de vitesse composé essentiellement des solides suivants :

- Le bâti (S_0) auquel nous associons les deux repères $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ en posant $\alpha = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ (α est un angle constant).
- Un plateau (S_1) de masse m_1 en liaison pivot d'axe $(A,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0).
- Un plateau (S_2) de masse m_2 en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0).
- Un galet (S_3) de masse m et de centre d'inertie C en liaison pivot d'axe $(C,\vec{x}_1)$ avec un solide (S_4). Le galet est constamment en contact ponctuel en I et en J respectivement avec les deux plateaux (S_1) et (S_2). Le mouvement de (S_3) par rapport à (S_1) et (S_2) est sans glissement.
- Une manivelle (S_5) en liaison pivot d'axe $(D,\vec{y}_0)$ avec le bâti (S_0) et en liaison glissière hélicoïdale avec le solide (S_4). La translation du galet suivant l'axe $(O,\vec{y}_0)$ fait varier les rayons de contact R_1 et R_2 sur les plateaux. La variation des rayons se fait à l'arrêt des plateaux (S_1) et (S_2).

La matrice d'inertie de (S_3) au point C est donnée par $\left[I_c(S_3)\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,-,-)}$. Tous les solides sont considérés homogènes.



On pose :

$\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1\ \vec{x}_0$; $\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \omega_2\ \vec{x}_0$

$\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \omega\ \vec{x}_1$

$\overrightarrow{AI} = -R_1\,\vec{y}_0$; $\overrightarrow{BJ} = R_2\,\vec{y}_0$

$\overrightarrow{CI} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0$; $\overrightarrow{CJ} = -a\,\vec{x}_0 - b\,\vec{y}_0$

ω_1, R_1, R_2 a et b sont des constantes positives.

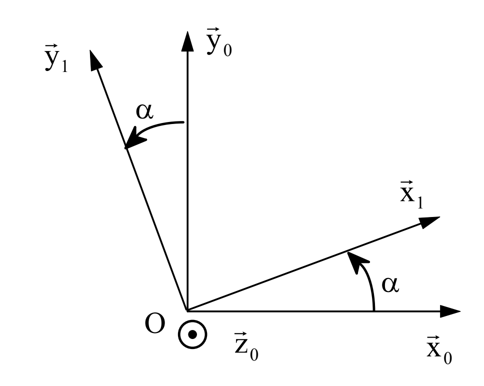


Figure 1

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminez le torseur cinématique au point A de (S_1) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_A$. En déduire la vitesse du point I: $\vec{V}(I \in S_1/S_0)$.
2) Déterminez le torseur cinématique au point B de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_B$. En déduire la vitesse du point J: $\vec{V}(J \in S_2/S_0)$.
3) Déterminez le torseur cinématique au point C de (S_3) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_C$. En déduire les vitesses aux points I et J: $\vec{V}(I \in S_3/S_0)$ et $\vec{V}(J \in S_3/S_0)$.
4) Calculer les vitesses de glissement de (S_3) par rapport à (S_1) et (S_2) aux points I et J : $\vec{V}(I \in S_3/S_1)$ et $\vec{V}(J \in S_3/S_2)$.
5) En exprimant la condition de roulement sans glissement de (S_3) par rapport à (S_1) et (S_2) aux points I et J, déterminer la relation entre les vitesses angulaires ω_1 et ω_2.
6) Déterminer la vitesse de roulement et de pivotement de (S_3) par rapport à (S_1) au point de contact I: $\vec{\Omega}_r(S_3/S_1)$ et $\vec{\Omega}_p(S_3/S_1)$.

Partie II : Etude cinétique

1) Déterminez le torseur cinétique au point C de (S_3) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\{\mathcal{C}(S_3/S_0)\}_C$.
2) Déterminez l'énergie cinétique de (S_3) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $E_C(S_3/S_0)$.
3) Déterminez le torseur dynamique au point C de (S_3) dans son mouvement par rapport à (S_0) : $\{\mathcal{D}(S_3/S_0)\}_C$.

Partie III : Etude dynamique

Nous étudions, dans cette partie, le mouvement du solide (S_3) à la limite du glissement par rapport par rapport à (S_1) et (S_2) avec les hypothèses suivantes :

- les actions mécaniques de (S_1) et (S_2) sur (S_3), respectivement aux points I et J, sont représentées par les deux glisseurs (on néglige le frottement de roulement et de pivotement) :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \to S_3)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{13} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} X_{13} & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ Z_{13} & 0 \end{Bmatrix}_{(I,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}(S_2 \to S_3)\}_J = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{23} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_J = \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{(J,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

- l'action mécanique (S_4) sur la roue (S_3) au point C est représentée par le torseur

$$\{\mathcal{T}(S_4 \to S_3)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{43} \\ \vec{m}_{43}(C) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}.$$

- l'action mécanique du champ de pesanteur sur (S_3) est négligeable devant les autres actions mécaniques.
- on note par *f* le coefficient de frottement de glissement entre (S_3) et les solides (S_1) et (S_2).

1) Déterminer et discuter les relations issus de la loi de Coulomb pour le frottement de glissement aux point I et J entre le solide (S_3) et les solides (S_1) et (S_2).
2) Déterminer le torseur équivalent aux actions mécaniques extérieures appliquées sur le solides (S_3) au point C : $\{\mathcal{T}(\bar{S}_3 \to S_3)\}_C$.
3) En appliquant le P.F.D. au solide (S_3) dans son mouvement par rapport au solide (S_0), écrire les six (6) équations scalaires des liaisons.

ETUDE DE LA SUSPENSION D'UNE MOTO

On se propose de faire une étude préliminaire de la suspension d'une moto (figure 1).

Tous les repères introduits ont une base orthonormée directe.

$R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère lié à l'espace terrestre (Piste $\mathbf{P_0}$), considéré galiléen. L'axe $(O,\vec{y}_0)$ est vertical ascendant.

On se limite, dans un premier temps, à l'étude des mouvements au cours desquels l'ensemble de la moto avec son pilote sont maintenus verticaux (plan de symétrie confondu avec $(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$). Les mouvements sont alors plans, parallèles à $(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

Modélisons l'ensemble {moto, pilote, accessoires, etc.} par un système matériel Σ formé des cinq solides suivants :

- **(S_1)** représentant le cadre, la selle, le moteur, le pilote, les accessoires, etc. Le repère lié à (S_1) est $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{O_0O} = x(t)\,\vec{x}_0 + y(t)\,\vec{y}_0$ et $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=\theta$.

  (S_1) a une masse ***m*** ; un centre d'inertie ***G*** ($\overrightarrow{OG} = b\,\vec{y}_1$, *b* = constante) ; un moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$: $\boldsymbol{I_z}$

  On désigne par **H** le point de (S_1) défini par $\overrightarrow{OH} = h\,\vec{x}_1$, *h* = constante.

- **(S_2)** représentant le bras oscillant de suspension arrière en liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec (S_1). $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_2) tel que $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=\psi$.

  La masse de (S_2) **est supposée négligeable**. On désigne par $\mathbf{O_1}$ le point de (S_2) défini par $\overrightarrow{O_1O} = l\,\vec{x}_2$, *l* = constante.

  Entre (S_1) et (S_2) sont montés un ressort de torsion **(E_1)** (de masse négligeable) et un amortisseur hydraulique **(A_1)** (de masse négligeable).

  L'action mécanique de (E_1) sur (S_2) est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{E_1 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ -c(\psi-e_0)\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$; ***c*** (raideur du ressort) et $\boldsymbol{e_0}$ (réglable) sont des constantes.

  L'action mécanique de (A_1) sur (S_2) est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{A_1 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ -a\dot{\psi}\,\vec{z}_0\end{matrix}\right\}$; ***a*** (coefficient d'amortissement) est une constante.

- **(S_3)** représentant la roue arrière en liaison pivot parfaite d'axe $(O_1,\vec{z}_0)$ avec (S_2). $R_3(O_1,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_3) tel que $(\vec{x}_0,\vec{x}_3)=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)=\alpha_1$.

  La masse de (S_3) **est supposée négligeable**. On note par $\mathbf{R_1}$ le rayon de (S_3) et par $\mathbf{I_1}$ le point de contact de (S_3) avec la piste P_0 : $\overrightarrow{O_1I_1} = -R_1\,\vec{y}_0$.

  L'action mécanique de (P_0) sur (S_3) est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{P_0 \to S_3}\right\} = \left\{\begin{matrix}T_1\vec{x}_0 + N_1\vec{y}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{I_1}$

- **(S_4)** représentant l'ensemble de la FOURCHE TELESCOPIQUE de suspension avant. (S_4) est en liaison glissière parfaite d'axe $(H,\vec{v})$ avec (S_1). $R_4(P,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_4) tel que $\overrightarrow{PH} = \rho(t)\,\vec{v}$ et $(\vec{x}_1,\vec{u}) = (\vec{y}_1,\vec{v}) = \beta$ avec β une constante.

  La masse de (S_4) **est supposée négligeable**. On désigne par $\mathbf{O_2}$ le point de (S_4) défini par $\overrightarrow{PO_2} = d\,\vec{u}$, d = constante.

  Entre (S_1) et (S_4) sont montés deux ressorts hélicoïdaux identiques (de masse négligeable). On désigne par **(E_2)** l'ensemble des deux ressorts.

  L'action mécanique de (E_2) sur (S_4) est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{E_2 \to S_4}\right\} = \left\{\begin{matrix} -2k(\rho - l_0)\,\vec{v} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_H$; $\boldsymbol{k}$ (raideur du ressort) et $\boldsymbol{l_0}$ (réglable) sont des constantes.

- **(S_5)** représentant la roue avant en liaison pivot parfaite d'axe $(O_2,\vec{z}_0)$ avec (S_4). $R_5(O_2,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_5) tel que $(\vec{x}_0,\vec{x}_5) = (\vec{y}_0,\vec{y}_5) = \alpha_2$.

  La masse de (S_5) **est supposée négligeable**. On note par $\mathbf{R_2}$ le rayon de (S_5) et par $\mathbf{I_2}$ le point de contact de (S_5) avec la piste P_0 : $\overrightarrow{O_2I_2} = -R_2\,\vec{y}_0$.

  L'action mécanique de (P_0) sur (S_5) est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{P_0 \to S_5}\right\} = \left\{\begin{matrix} T_2\vec{x}_0 + N_2\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_2}$

Pour savoir comment travaillent les suspensions, on cherche à établir les équations de mouvement du système Σ lancé (moteur coupé, boîte de vitesse au point mort) sur une piste P_0.

Nous supposons, dans toute l'étude, que le contact des deux roues (S_3) et (S_5) avec la piste (P_0) en $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$ est maintenu avec un roulement sans glissement.

On néglige tous les frottements aérodynamiques sur le système Σ. Le champ de pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g} = -g\,\vec{y}_0$; g est une constante.

On note par $\left\{\tau_{S_i \to S_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix}\right\}_{(A_k,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_0)}$ le torseur d'action mécanique dans une liaison de deux solides (S_i) et (S_j) exprimé dans une base $(\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_0)$ au centre géométrique de la liaison A_k. (à préciser avec la base).

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport à la piste (P_0) au point O $\left\{\mathcal{V}(S_1/P_0)\right\}_O$. En déduire le vecteur vitesse au point H : $\vec{V}(H \in S_1/P_0)$.
2) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à la piste (P_0) au point O $\left\{\mathcal{V}(S_2/P_0)\right\}_O$. En déduire le vecteur vitesse au point O_1: $\vec{V}(O_1 \in S_2/P_0)$.
3) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_3) par rapport à la piste (P_0) au point O_1 $\left\{\mathcal{V}(S_3/P_0)\right\}_{O_1}$. En déduire le vecteur vitesse au point I_1 ; $\vec{V}(I_1 \in S_3/P_0)$, puis l'exprimer dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

4) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_4) par rapport à la piste (P_0) au point P $\{\mathcal{V}(S_4 / P_0)\}_P$. En déduire le vecteur vitesse au point O_2: $\vec{V}(O_2 \in S_4 / P_0)$.

5) Donner le torseur cinématique du mouvement de (S_5) par rapport à la piste (P_0) au point O_2 $\{\mathcal{V}(S_5 / P_0)\}_{O_2}$. En déduire le vecteur vitesse au point I_2 ; $\vec{V}(I_2 \in S_5 / P_0)$, puis l'exprimer dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

6) Donner deux équations scalaires qui expriment le maintient en contact des deux roues (S_3) et (S_5) avec la piste (P_0).

7) Donner deux équations scalaires qui expriment le roulement sans glissement des deux roues (S_3) et (S_5) par rapport à la piste (P_0).

Partie II : Etude dynamique et énergétique.

9) Déterminer le torseur cinétique au point O du système Σ dans son mouvement par rapport à la piste (P_0).

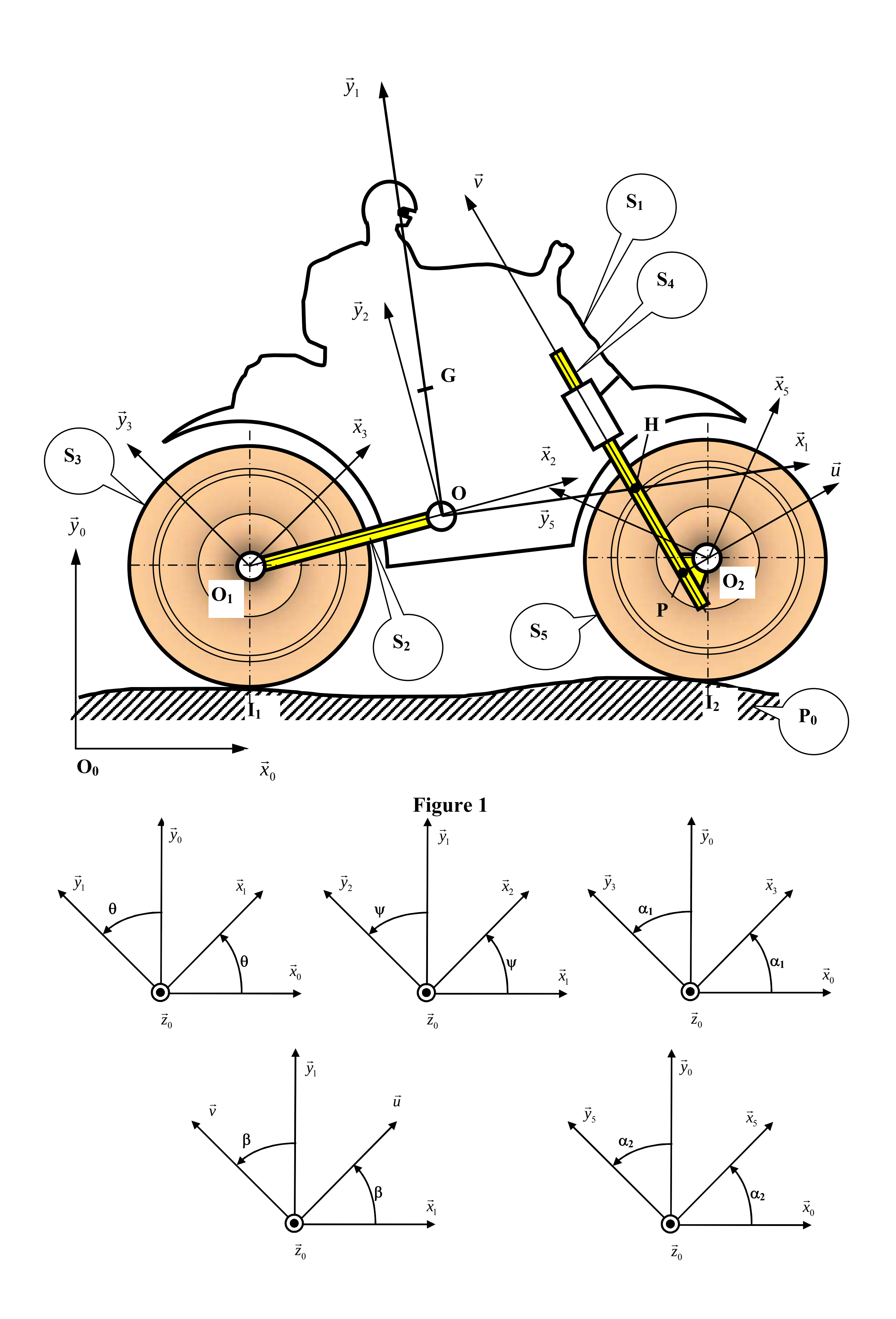
10) Calculer l'énergie cinétique du système Σ au cours de son mouvement par rapport à la piste (P_0).

11) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ.

12) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques intérieures appliquées au système Σ.

13) Calculer la puissance des efforts extérieurs à Σ au cours de son mouvement par rapport à la piste (P_0) et la puissance des efforts intérieurs entre les solides de Σ.

14) Par application du théorème de l'énergie cinétique, écrire une équation de mouvement du système Σ au cours de son mouvement par rapport à la piste (P_0).



$\vec{y}_1$
$\vec{v}$
S1
S4
$\vec{y}_2$
G
$\vec{x}_5$
$\vec{x}_1$
H
$\vec{u}$
$\vec{y}_3$
$\vec{x}_3$
$\vec{x}_2$
S3
O
$\vec{y}_0$
$\vec{y}_5$
O1
O2
P
S2
S5
I1
I2
P0
O0
$\vec{x}_0$
θ
ψ
α1
β
α2
$\vec{z}_0$

Figure 1

ETUDE D'UNE POMPE A PETROLE BRUT

Le mécanisme schématisé par la **figure 1** est une pompe à pétrole brut utilisée lorsque la pression de la nappe est insuffisante pour l'extraction du pétrole et qu'une action de pompage est indispensable. Sa forme particulière justifie son appellation de tête de cheval.

La pompe est composée d'un piston qui coulisse dans un cylindre **(5)**. Le mouvement vertical alternatif (mouvement de va et vient) est fourni par le câble **(4)**, fixé d'une part sur le piston et d'autre part en **N** sur la tête de cheval **(3)**. La tête **(3)** est articulée en **D** sur une structure fixe par rapport au bâti **(0)** et est commandée en **C** par une biellette **(2)**. Celle-ci est manœuvrée en **B** par la manivelle **(1)** articulée en **A** par rapport au bâti **(0).**

Le mouvement du système est considéré plan sur plan (parallèle au plan donné par $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$).

Pour l'étude du système, nous utilisons le paramétrage suivant :

- $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au bâti **(0)**. L'axe $(A, \vec{z}_0)$ est normal au plan du mouvement du système ;
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est un repère lié à la manivelle (1). On pose $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est un repère lié à la biellette (2). On pose $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.
- $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est un repère lié à la tête de cheval (3). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$. Sur la figure 1 l'angle α est orienté négativement autour de $\vec{z}_0$.

On pose : $\overrightarrow{AB} = e\ \vec{x}_1$; $\overrightarrow{BC} = L\ \vec{x}_2$; $\overrightarrow{CD} = d\ \vec{x}_3$; $\overrightarrow{DE} = R\ \vec{x}_0$ où e, L, d et R sont des constantes géométriques positives.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_1) par rapport au solide (S_0) au point B $\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_B$.
2) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0) au point B $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_B$. Déduire le vecteur vitesse au point C : $\vec{V}(C \in S_2/S_0)$.
3) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_0) au point D $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_D$. Déduire le vecteur vitesse au point C : $\vec{V}(C \in S_3/S_0)$.
4) Déduire des questions (2) et (3) deux équations scalaires de liaisons entre les vitesses angulaires $\dot{\theta}, \dot{\beta}$ et $\dot{\alpha}$.
5) Déterminer, par les deux méthodes géométrique et analytique, le centre instantané de rotation du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0). Définir alors la base et la roulante du mouvement de (S_2) par rapport au solide (S_0).

Partie II : Géométrie des Masses Et Cinétique

On se propose de déterminer le centre et la matrice d'inertie de la tête de cheval **(3)** modélisée par deux solides homogènes **(S_{31})** et **(S_{32})**. (**Voir figure 2**)

- Le solide (S_{31}) est une portion d'un cylindre de centre D, de rayon R et de longueur h. On note par **m_1** la masse de **(S_{31})**.
- Le solide **(S_{32})** est un parallélépipède rectangle de centre O, de longueur 2d, de largeur b et profondeur h (égale à la longueur du cylindre de S_{31}). On note par **m_2** la masse de **(S_{32})**.

On pose $\overrightarrow{OD} = -a\ \vec{y}_3$.

1) Calculer le volume de **(S_{31})** en fonction de R, h et d.
2) Déterminer le centre d'inertie G_1 de **(S_{31})** dans le repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.
3) Donner alors le centre d'inertie G de la tête de cheval **(3)** dans le repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.
4) Donner la matrice d'inertie de **(S_{32})** au point O dans la base du repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$: $[I_O(S_{32})]$.
5) Déduire cette matrice au point D : $[I_D(S_{32})]$ dans la base du repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.
6) Déterminer la matrice d'inertie de **(S_{31})** au point D dans la base du repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$: $[I_D(S_{31})]$.
7) Donner alors la matrice d'inertie de la tête de cheval **(3)** au point D dans la base du repère $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$: $[I_D(S_3)]$.
8) Déterminer le torseur cinétique $\{\mathcal{C}(S_3 / S_0\}_D$.
9) Déterminer le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S_3 / S_0\}_D$.

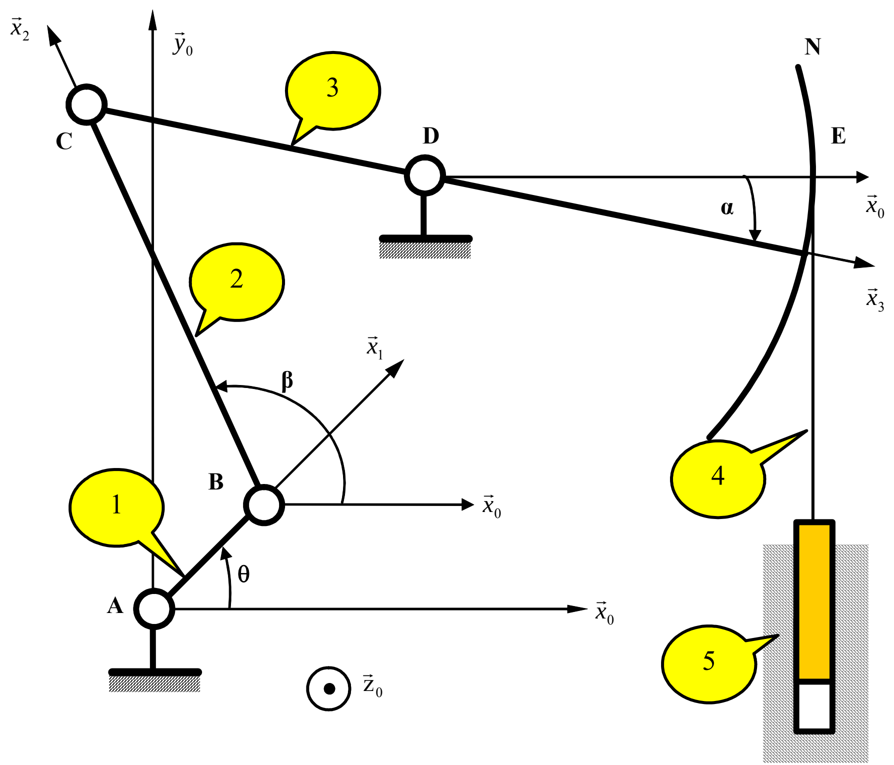


Figure 1

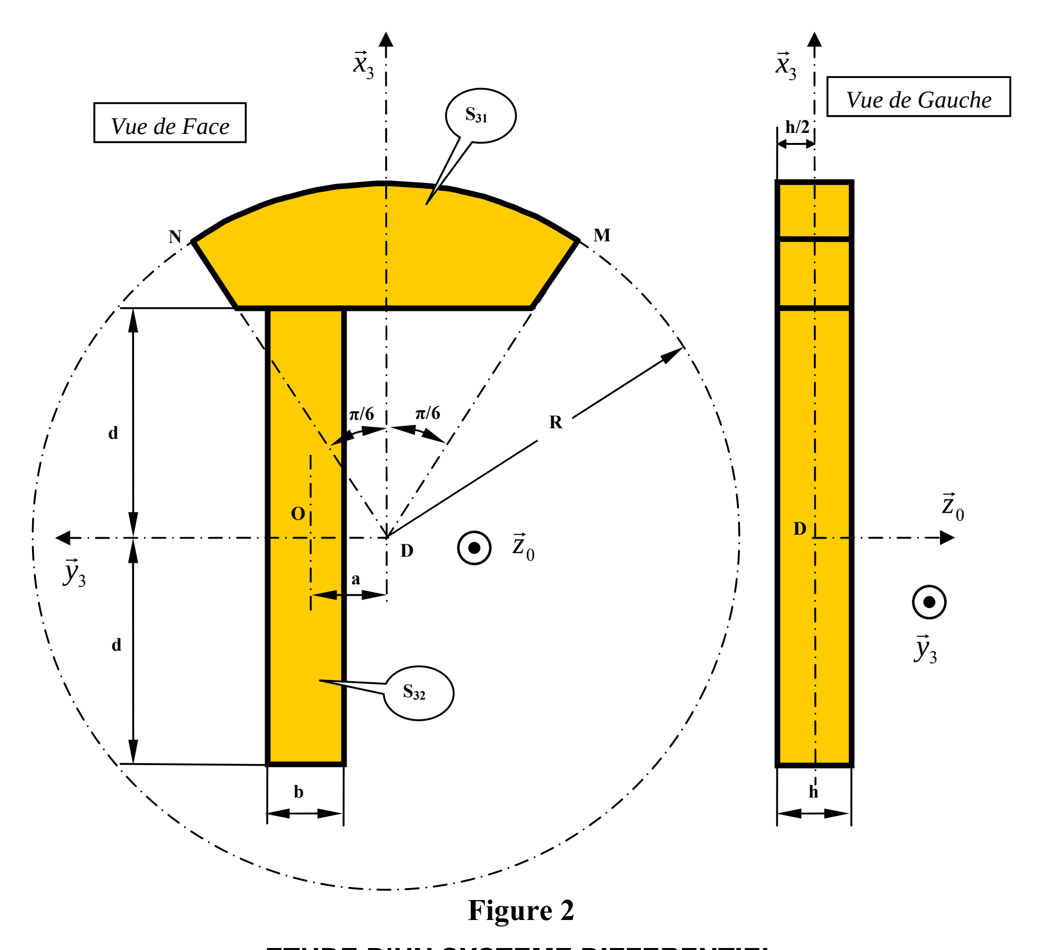


Figure 2

ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL

Le système est composé d'un solide (S_1) qui sert à transmettre le mouvement de rotation à deux arbres coaxiaux (S_4) et (S_5). (Figures 1 et 2).

Le solide (S_1) est entraîné en rotation par un arbre moteur lié à un pignon. Les liaisons (S_1) avec (S_4) et (S_4) avec (S_0) sont de type pivot d'axe commun $(O,\vec{z}_0)$.

Paramétrage de la position des solides :

- On attache au solide (S_0) le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et au solide (S_1) les deux repères $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ et $R_1^*(O,\vec{x}_1^*,\vec{y}_1^*,\vec{z}_0)$ tel que $\alpha = (\vec{x}_1,\vec{x}_1^*) = cte$.
- Le mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) est décrit par le paramètre $\theta_1 = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- Le solide (S_2) est lié au repère $R_2(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$. Le mouvement de ($S_2$) par rapport à ($S_1$) est décrit par l'angle $\psi_2 = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$. La position du point O_2 est définie par $\overrightarrow{OO_2} = (R + r)\,\vec{x}_1$
- Le solide (S_3) est lié au repère $R_3(O_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$. Le mouvement de ($S_3$) par rapport à ($S_1$) est décrit par l'angle $\psi_3 = (\vec{x}_1,\vec{x}_3) = (\vec{y}_1,\vec{y}_3)$. La position du point O_3 est définie par $\overrightarrow{O^*O_3} = -(R + r)\,\vec{x}_1^*$
- Le solide (S_4) est lié au repère $R_4(O,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$. Le mouvement de ($S_4$) par rapport à ($S_0$) est décrit par l'angle $\theta_4 = (\vec{x}_0,\vec{x}_4) = (\vec{y}_0,\vec{y}_4)$.
- Le solide (S_5) est en liaison pivot glissant d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec (S_0). Grâce à cette liaison, (S_5) peut se trouver :
  - ∗ soit en AB, auquel cas il est en contact en A avec (S_2).
  - ∗ soit en A'B', auquel cas il est en contact en A' avec (S_2) et en B' avec (S_3).
- Le solide (S_5) est lié au repère $R_5(O_5,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$. Le mouvement de ($S_5$) par rapport à ($S_0$) est décrit par l'angle $\theta_5 = (\vec{x}_0,\vec{x}_5) = (\vec{y}_0,\vec{y}_5)$.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

Etude du mécanisme lorsque la roue (S_5) se trouve dans la position AB.

1) Trouver les équations de liaison qui traduisent le non glissement en A et en C.
2) Expliquer pourquoi le mécanisme, dans cette première configuration, ne peut pas transmettre le mouvement depuis (S_1) jusqu'à (S_4) et (S_5).

Etude du mécanisme lorsque la roue (S_5) se trouve dans la position A'B'.

3) Etablir le nouveau système d'équations traduisant le non glissement en A', B' et C.
4) Le solide (S_1) est mis en rotation ($\dot{\theta}_1 = \omega = cte$). On immobilise le solide (S_4). Le mécanisme peut-il alors transmettre un mouvement à (S_5).

Modification du montage

On modifie le système de façon que (S_3), toujours monté sur (S_1) par l'intermédiaire d'une liaison pivot, soit avec (S_2) au point D (figure 3). Cette modification est obtenue en adoptant une nouvelle valeur pour α.

On place la roue (S_5) dans sa position initiale AB et on fait l'hypothèse de non glissement en D.

On donne $\overrightarrow{H_2D} = r\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{H_3D} = -r\,\vec{u}$ avec $\vec{u} = -\dfrac{R+r}{2r}\left[(1+\cos\alpha)\,\vec{x}_1 + \sin\alpha\,\vec{y}_1\right]$ et H_2 et H_3 sont les projections orthogonales du point D respectivement sur les axes $(O_2,\vec{z}_0)$ et $(O_3,\vec{z}_0)$.

5) Etablir le nouveau système d'équations traduisant le non glissement en A, C et D.

6) Trouver le degré de mobilité du système (degré de liberté).

7) Indiquer l'expression qui relie les paramètres d'entrée et de sortie.

On positionne la roue (S_5) en A'B'

(S_2) et (S_3) étant toujours en contact sans glissement au point D. On place à nouveau la roue (S_5) en contact avec (S_3) (position A'B').

8) Etablir le nouveau système d'équations traduisant le non glissement en A', B', C et D.

9) Trouver le degré de mobilité du système.

Partie II : Etude dynamique

[On considère le mécanisme modifié selon l'étude cinématique I-8 : la roue (S_5) est positionnée en A'B']

On note par :

- I_1 le moment d'inertie d'un solide (S_1) par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$,
- I_2 le moment d'inertie d'un solide (S_2) par rapport à l'axe $(O_2,\vec{z}_0)$,
- I_3 le moment d'inertie d'un solide (S_3) par rapport à l'axe $(O_3,\vec{z}_0)$. On suppose que $I_2 = I_3 = I_{23}$.
- I_4 le moment d'inertie d'un solide (S_4) par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$,
- I_5 le moment d'inertie d'un solide (S_5) par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$. On suppose que $I_4 = I_5 = I_{45}$

Les roues (S_2) et (S_3) sont supposées identiques de masse m_{23}. De même pour les roues (S_4) et (S_5), elles sont identiques de masse m_{45}. La roue (S_1) est de masse m_1.

On suppose que les centres d'inerties des différents solides (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) et (S_5) sont respectivement O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5.

<u>Questions</u>

1) Déterminer le moment cinétique au point O_2 puis au point O de (S_2) dans son mouvement par rapport à R_0 : $\vec{\sigma}_{O2}(S_2/R_0)$ et $\vec{\sigma}_O(S_2/R_0)$.

2) Déterminer le moment cinétique au point O_3 puis au point O de (S_3) dans son mouvement par rapport à R0 : $\vec{\sigma}_{O3}(S_3/R_0)$ et $\vec{\sigma}_O(S_3/R_0)$.

3) Déterminer le moment cinétique au point au point O dans leur mouvement par rapport à R_0 :

   a) de (S_1) : $\vec{\sigma}_O(S_1/R_0)$,

   b) de (S_4) : $\vec{\sigma}_O(S_4/R_0)$,

c) de (S_5) : $\vec{\sigma}_O(S_5 / R_0)$,

4) Déterminez l'énergie cinétique de l'ensemble des solides (Σ) constitué par (S_1), (S_2), (S_3) et (S_4) dans leur mouvement par rapport à R_0.

5) En déduire l'énergie cinétique de (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0 en fonction de $\omega_1 = \dot{\theta}_1$.

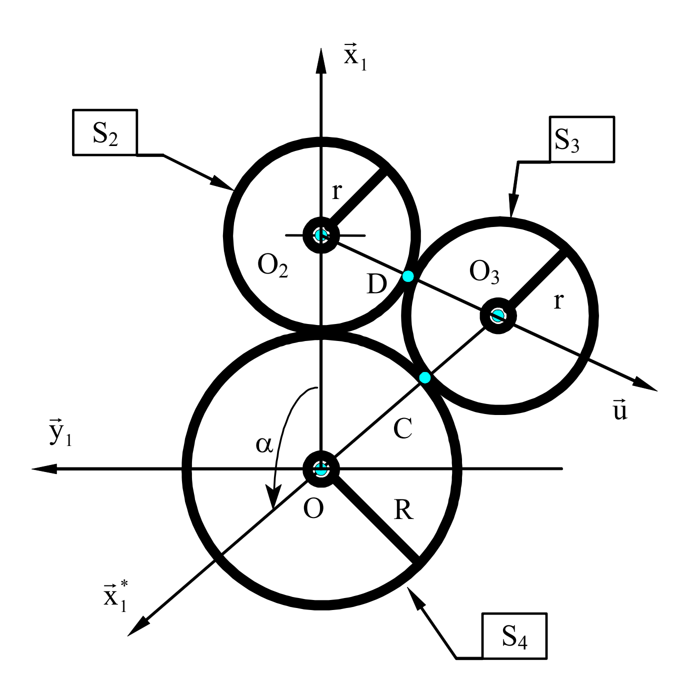
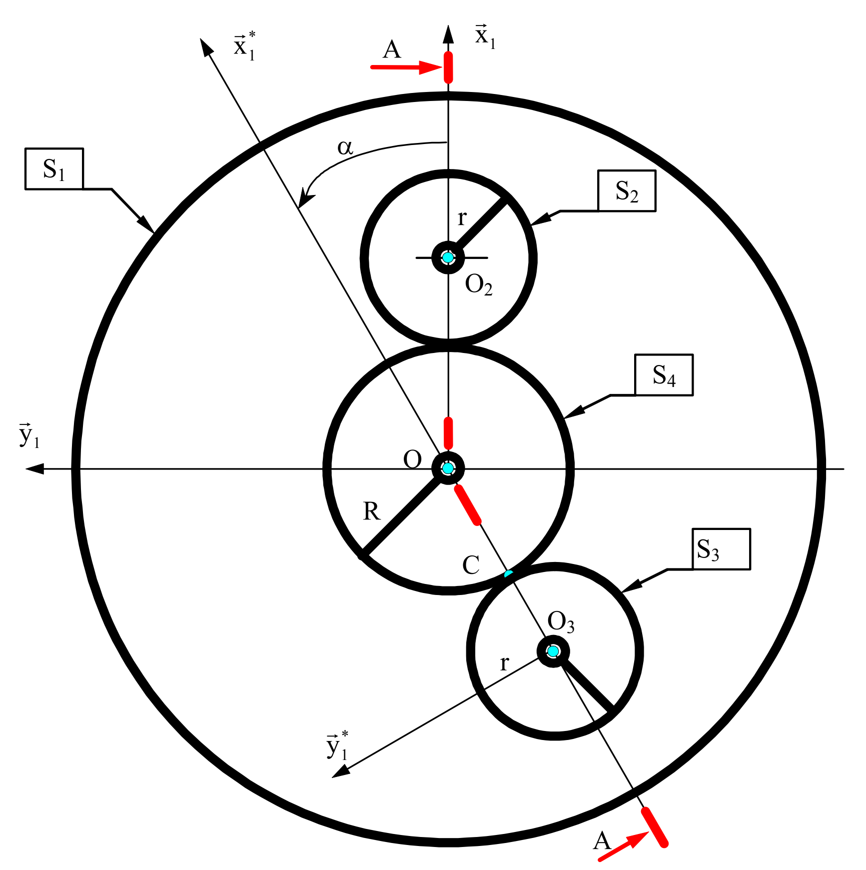


Figure 3

Vue de face lorsque S_3 se trouve en contact avec S_2.
Les solides S_1 et S_5 n'ont pas été représentés.
S_2 et S_4 ne sont pas en contact mutuel.



Remarque importante : Dans la vue de face : La roue (S_5) n'est pas représentée. La roue (S_2) ne rentre pas en contact avec la roue (S_4). Le pignon moteur n'est pas représenté.

Figure 1 ***<u>(Vue de face)</u>***

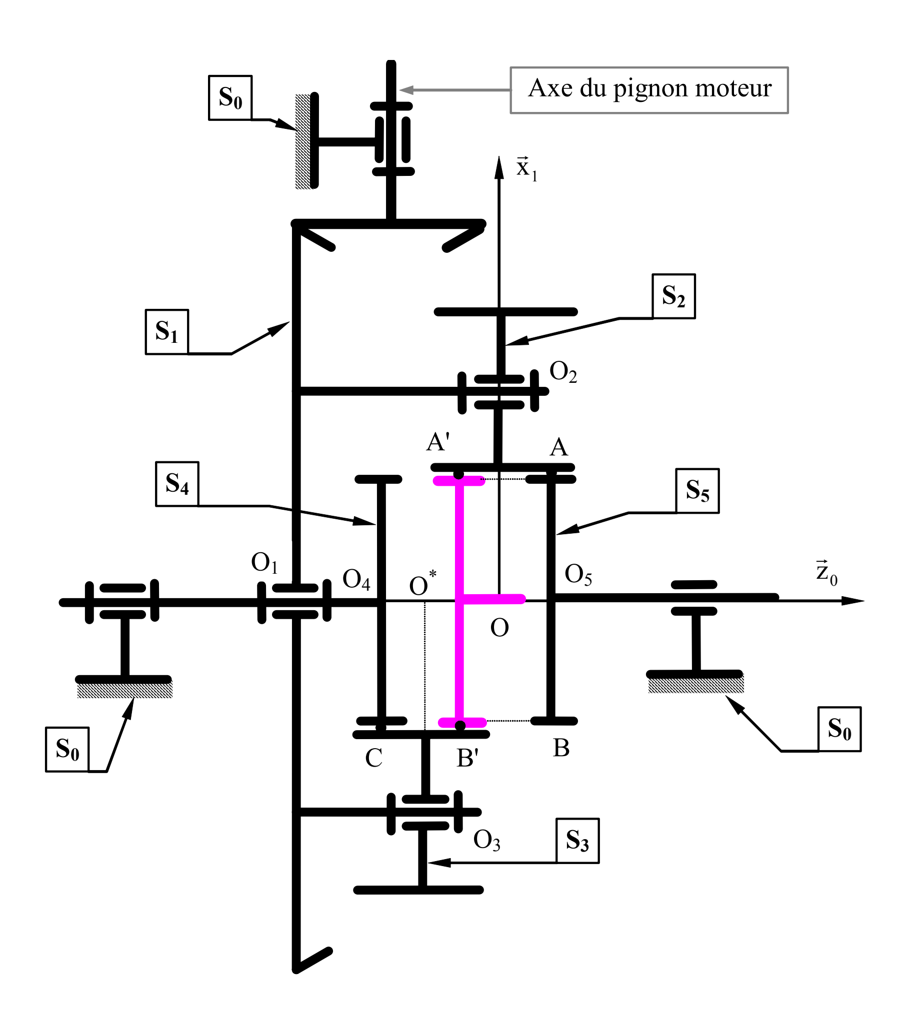


Figure 2 ***<u>(Coupe selon AA)</u>***

ETUDE D'UN SYSTEME EXCENTRIQUE

On considère le système excentrique donné par la figure 1, en mouvement dans un plan vertical.

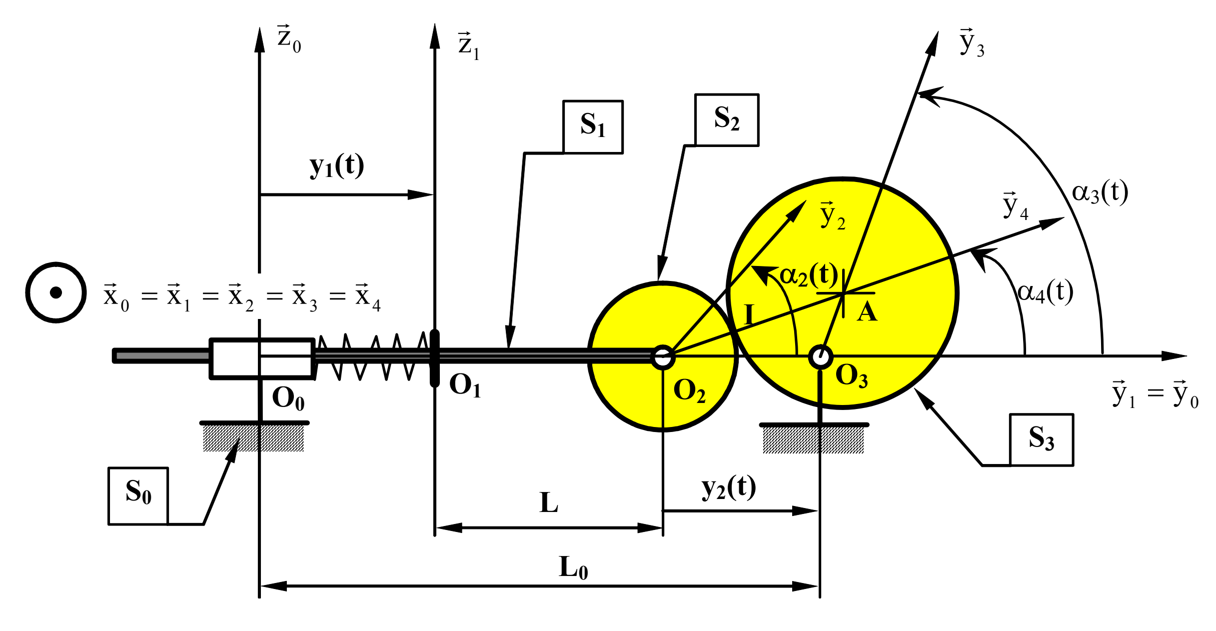


FIGURE 1

Le système est composé des solides homogènes suivants :

- un solide fixe **(S$_0$) (bâti)** lié à un repère galiléen $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
- **une tige (S$_1$)** de masse **m$_1$**, se déplaçant en translation suivant l'axe $(O_0, \vec{y}_0)$ grâce à la liaison glissière parfaite en O$_0$ avec (S$_0$). Au solide (S$_1$) est associé le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que O$_1$ soit à une distance **L** par rapport à l'une des extrémités de (S$_1$) et $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$, $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ et $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ (translation),
- **un disque (S$_2$)** de masse **m$_2$**, de rayon **r$_2$** et de centre O$_2$, en liaison pivot parfaite en O$_2$ avec l'extrémité de la tige (S$_1$). Au solide (S$_2$) est associé le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$ et $\alpha_2(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$,
- **un disque (S$_3$)** de masse **m$_3$**, de rayon **r$_3$** et de centre A, en liaison pivot parfaite avec le bâti (S$_0$) en O$_3$. Le point O$_3$, origine du repère R$_3$, est excentré par rapport au centre géométrique du disque S$_3$. Au solide (S$_3$) est associé au repère $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\alpha_3(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ et $\vec{x}_3 = \vec{x}_0$.
- **un ressort de rappel R** de **masse négligeable**, s'appuyant sur O$_0$ et sur O$_1$, assure le contact en I entre (S$_2$) et (S$_3$). Pour repérer la position du point I on fait passer l'axe $(O_2, \vec{y}_4)$ par le centre A du disque (S$_3$). On pose alors $\alpha_4(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$ et $\vec{x}_4 = \vec{x}_0$.

On pose pour déterminer les composantes des vecteurs position :

$\overrightarrow{O_0O_1} = y_1(t)\vec{y}_0$	$\overrightarrow{O_1O_2} = L\vec{y}_0$ L = cst > 0	$\overrightarrow{O_2O_3} = y_2(t)\vec{y}_0$ $\overrightarrow{O_2I} = r_2\,\vec{y}_4$	$\overrightarrow{O_3A} = e\vec{y}_3$ e = cst >0	$\overrightarrow{O_0O_3} = L_0\,\vec{y}_0$ L_0 = cst > 0

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Exprimer les valeurs de $\cos\alpha_4$ et $\sin\alpha_4$ en fonction de $\cos\alpha_3$, $\sin\alpha_3$ et de certains paramètres géométriques et de position. (On utilise la méthode vectorielle).
2) Etablir une relation scalaire entre $y_1(t)$ et $y_2(t)$. En déduire une relation entre $\dot{y}_1$ *et* $\dot{y}_2$.
3) Donner le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}(S_2 / S_3)\right\}_{O_2}$. En déduire la vitesse de glissement au point de contact I du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_3).
4) Donner les équations scalaires déduites de la condition de roulement sans glissement en I du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_3).
5) En déduire une relation entre y_2, $\dot{y}_2$, $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\alpha}_3$ et des constantes géométriques.

Dans la suite, on considère le système Σ composé des solides (S_1), (S_2) et (S_3) : $\Sigma = \left\{S_1, S_2, S_3\right\}$.

Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_3) s'effectue sans glissement.

Partie II : Géométrie des masses et étude cinétique

1) Donner les matrices d'inertie des deux disques (S_2) et (S_3): $\left[I_{O_2}(S_2)\right]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$; $\left[I_{O_3}(S_3)\right]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$
2) Déterminer le torseur cinétique et le torseur dynamique au point O_1 du solide (S_1) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
3) Déterminer le torseur cinétique et le torseur dynamique au point O_2 du solide (S_2) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
4) Déterminer le torseur cinétique et le torseur dynamique au point O_3 du solide (S_3) dans son mouvement par rapport au solide (S_0).
5) Calculer l'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

Partie III : Etude dynamique et énergétique.

Le système étant plan. Toutes les liaisons sont considérées parfaites. Le champ de la pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ avec g une constante positive.

Les torseurs d'action mécanique dans les liaisons ont les formes suivantes:

$$\left\{\tau_{S_0 \to S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} Z_{01}\ \vec{z}_0 \\ L_{01}\ \vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_{O_0} ; \left\{\tau_{S_0 \to S_3}\right\} = \left\{\begin{matrix} Y_{03}\ \vec{y}_0 + Z_{03}\ \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_3} ; \left\{\tau_{S_1 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix} Y_{12}\,\vec{y}_0 + Z_{12}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_2}$$

$$\left\{\tau_{S_2 \to S_3}\right\} = \left\{\begin{matrix} Y_{23}\,\vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I} ; \quad \left\{\tau_{ressort \to S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} -k\,(y_1 - l_0)\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$$

avec ***k*** (raideur du ressort)

et l_0 (réglable) sont des constantes.

Le disque (S_3) est actionné en rotation à l'aide d'un moteur M (non représenté ici) qui exerce sur (S_3) un torseur couple donné par $\left\{\tau_{M \to S_3}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_m\, \vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_{O_3}$.

Le solide (S_1) est soumis à une action mécanique extérieure de sortie (exercée par un système matériel E non représenté) et modélisée par un torseur glisseur donné par $\left\{\tau_{E \to S_1}\right\} = \left\{\begin{matrix} F_s\, \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$.

1) Faire le bilan et écrire, au point O_3 dans la base du repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur le disque (S_3). $\left\{\tau_{\overline{S}_3 \to S_3}\right\}_{(O_3, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$.
2) Ecrire les relations qui découlent de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au disque (S_3) au cours de son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
3) Résoudre le système des équations obtenues et déterminer les inconnues d'action mécanique appliquées sur le disque (S_3) à savoir Y_{03}, Z_{03}. et Y_{23}.
4) Calculer la puissance développée par les efforts extérieurs sur le système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et la puissance développée par les efforts intérieurs au système Σ.
5) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

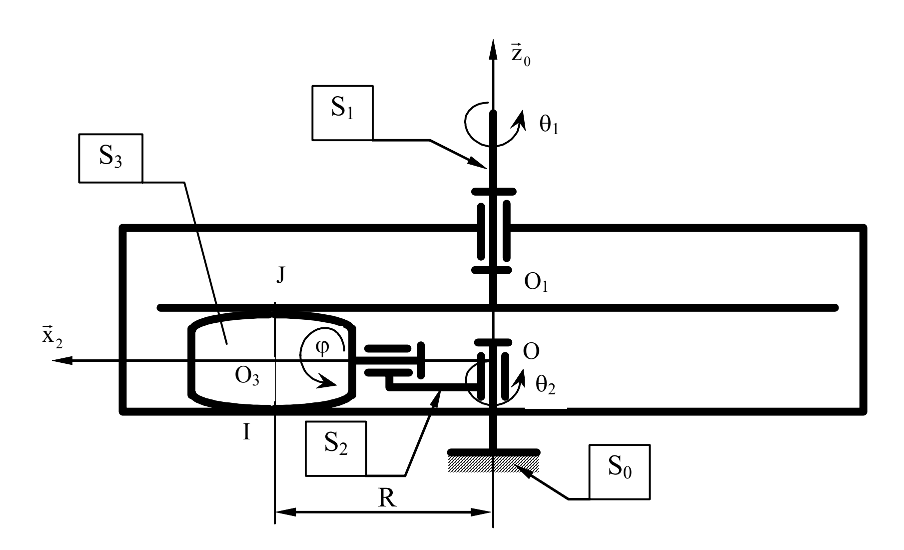
ETUDE D'UNE BUTEE A ROULEAU

On considère la butée schématisée par la **figure 1**. Elle est constituée :

- d'un bâti (S_0) lié au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$,
- d'un plateau (S_1) lié au repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S_0). On pose $\theta_1 = (\vec{x}_0,\widehat{\ }\vec{x}_1)$
- d'une cage à rouleau (S_2) liée au repère $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S_0). On pose $\theta_2 = (\vec{x}_0,\widehat{\ }\vec{x}_2)$
- d'un rouleau tonneau (S_3) de centre O_3, lié au repère $R_3(O,\vec{x}_2,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_2)$ avec (S_2). On pose $\varphi = (\vec{y}_2,\widehat{\ }\vec{y}_3)$

Hypothèse : On supposera qu'il y a roulement sans glissement de (S_3) sur (S_0) en I et de (S_3) sur (S_1) en J.

Données : $\overrightarrow{OO_3} = R\,\vec{x}_2$ avec (R = Cte > 0). ; $\overrightarrow{O_3J} = -\overrightarrow{O_3I} = r\ \vec{z}_0$; (r = Cte > 0)



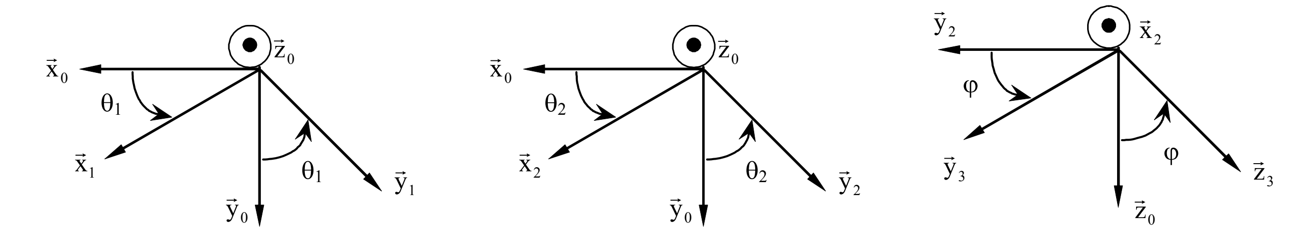


Figure 1

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique de mouvement de (S_3) par rapport à (S_0) en I : $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_I$
2) Déterminer le torseur cinématique de mouvement de (S_3) par rapport à (S_1) en J : $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}_J$

3) En exprimant la condition de roulement sans glissement de (S_3) par rapport à (S_0) en I, déterminer le rapport des vitesses $\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\varphi}}$ en fonction de R et r.

4) En exprimant la condition de roulement sans glissement de (S_3) par rapport à (S_1) en J, déterminer le rapport des vitesses $\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\varphi}}$ en fonction de R et r. En déduire le rapport des vitesses $\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1}$.

5) Calculer les vecteurs accélération :

   a) du point géométrique de contact I par rapport à (S_0) : $\vec{\Gamma}(I/S_0)$;

   b) du point I lié au solide (S_3) par rapport à (S_0) : $\vec{\Gamma}(I \in S_3/S_0)$.

Partie II : Géométrie des Masses

On se propose de déterminer par application du théorème de GULDIN le volume du rouleau tonneau (S_3) de centre O_3.

Ce volume est engendré par la rotation autour de l'axe $(O_3, \vec{x}_2)$ .d'une surface plane homogène (S) de longueur 2L et délimitée d'un coté par un arc de cercle de centre C et de rayon ρ. (voir figure 2)

1) Calculer l'aire de la surface plane S en fonction des paramètres **a, L et** ρ.

2) Etudier la symétrie matérielle de (S) puis déterminer son centre d'inertie G.

3) En appliquant le deuxième théorème de GULDIN, calculer le volume V du rouleau tonneau (S_3).

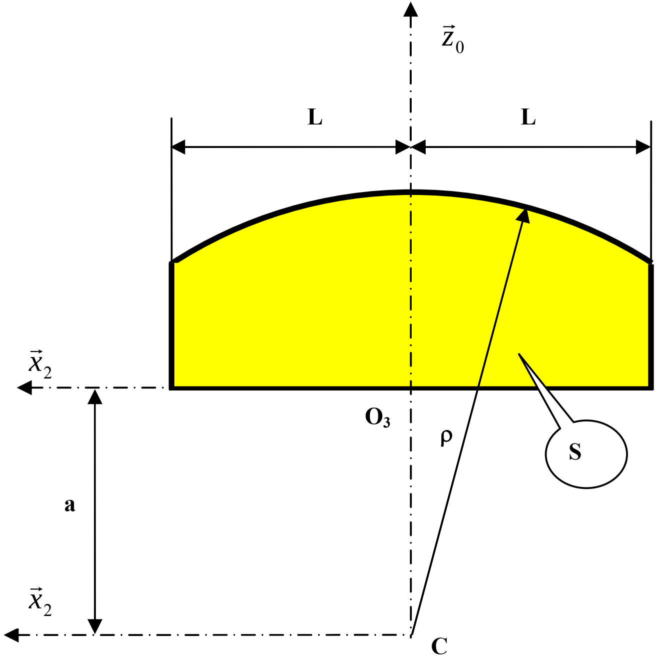


Figure 2

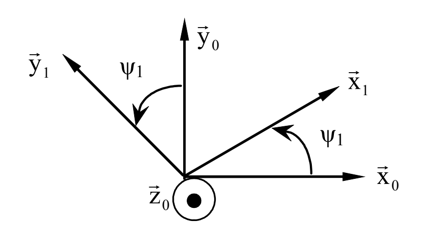
ETUDE D'UN MECANISME PLANETAIRE A COULISSE

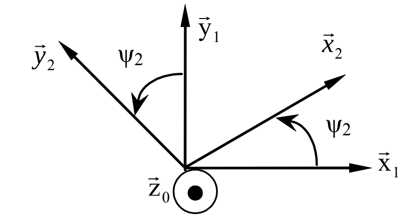
On se propose d'étudier un appareil qui transforme le mouvement circulaire continu en :

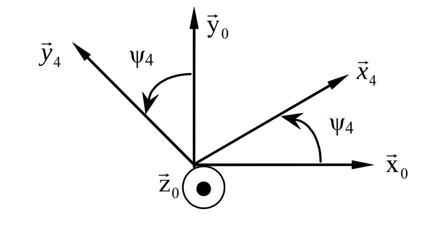
- un mouvement rectiligne alternatif d'une part,
- un mouvement circulaire continu d'autre part.

Le système est constitué principalement de cinq solides (S_0), (S_1), (S_2), (S_3) et (S_4) (**voir figure 1**).

- (S_0) est le bâti fixe muni de deux axes perpendiculaires en O $(O,\vec{x}_0)$ et $(O,\vec{z}_0)$ qui jouent un rôle privilégié. $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_0) tel que $\vec{z}_0$ soit perpendiculaire au plan de la feuille.
- (S_1) est une manivelle liée à (S_0) par une liaison pivot d'axe $(O_1,\vec{z}_0)$. $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est le repère lié à (S_1) tel que $O_1 = O$, $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$, $\psi_1 = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$ avec $\dot{\psi}_1 = \omega_1 = cte$.
- (S_2) est une roue cylindrique de centre O_2, de rayon r liée à (S_1) par une liaison pivot d'axe $(O_2,\vec{z}_0)$ avec $\overrightarrow{O_1O_2} = e\vec{x}_1$ (e = cte). $R_2(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est le repère lié à (S_2) tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et $\psi_2 = (\vec{x}_1,\vec{x}_2)$. ($S_2$) est en contact supposé ponctuel en I avec (S_4).
- (S_4) est une roue cylindrique de centre O, de rayon R montée liée à (S_0) par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$. $R_4(O,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_4)$ est le repère lié à (S_4) tel que $\vec{z}_4 = \vec{z}_0$ et $\psi_4 = (\vec{x}_0,\vec{x}_4)$
- (S_3) est une coulisse liée à (S_0) par une liaison glissière d'axe $(O_4,\vec{x}_0)$. On pose $\overrightarrow{O_4O} = L\,\vec{x}_0$ (L = constante positive). (S_3) est liée à (S_2) par l'intermédiaire de deux doigts A et B appartenant à (S_2) et qui glissent dans la rainure de (S_3). L'axe de la rainure est $(O_2,\vec{y}_0)$. On repère la position de la coulisse (S_3) par $\overrightarrow{OO_3} = x\vec{x}_0$.







Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Quelle est la nature du mouvement de (S_2) par rapport à (S_0). En déduire la vitesse $\vec{V}(A \in S_2 / R_0)$ et la trajectoire de **A** dans R_0.
2) Calculer la vitesse de la coulisse par rapport au repère R_0.
3) Déterminer la vitesse de glissement de **A** dans la glissière $\vec{V}(A \in S_2 / S_3)$.
4) Déterminer le rapport $\rho = \dfrac{\omega_4}{\omega_1}$ (avec $\omega_4 = \dot{\psi}_4$) en fonction de **e** et **R** dans l'hypothèse de roulement sans glissement en **I**.
5) Calculer la vitesse du point géométrique **I** par rapport à R_0 $\vec{V}(I / R_0)$.

Partie II : Géométrie des Masses

On se propose de déterminer la matrice d'inertie de la roue (S_4) modélisée par un cylindre creux de centre O et d'axe $(O, \vec{z}_0)$ homogène de rayon intérieur $\mathbf{R_1}$ et de rayon extérieur $\mathbf{R_2}$. On note par **H** la hauteur de (S_4) et par **m** sa masse. (**Voir figure 2**)

Question

1) Donner la forme de la matrice d'inertie de (S_4) au point O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $[I_O(S_4)]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_O)}$. Justifier votre réponse.
2) Calculer les termes de cette matrice d'inertie au point O : $[I_O(S_4)]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_O)}$.
3) Déduire la matrice d'inertie de (S_4) au point O dans une base $(\vec{x}_0, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{u}) = (\vec{z}_0, \vec{v})$ pour $\alpha = \pi / 6$.

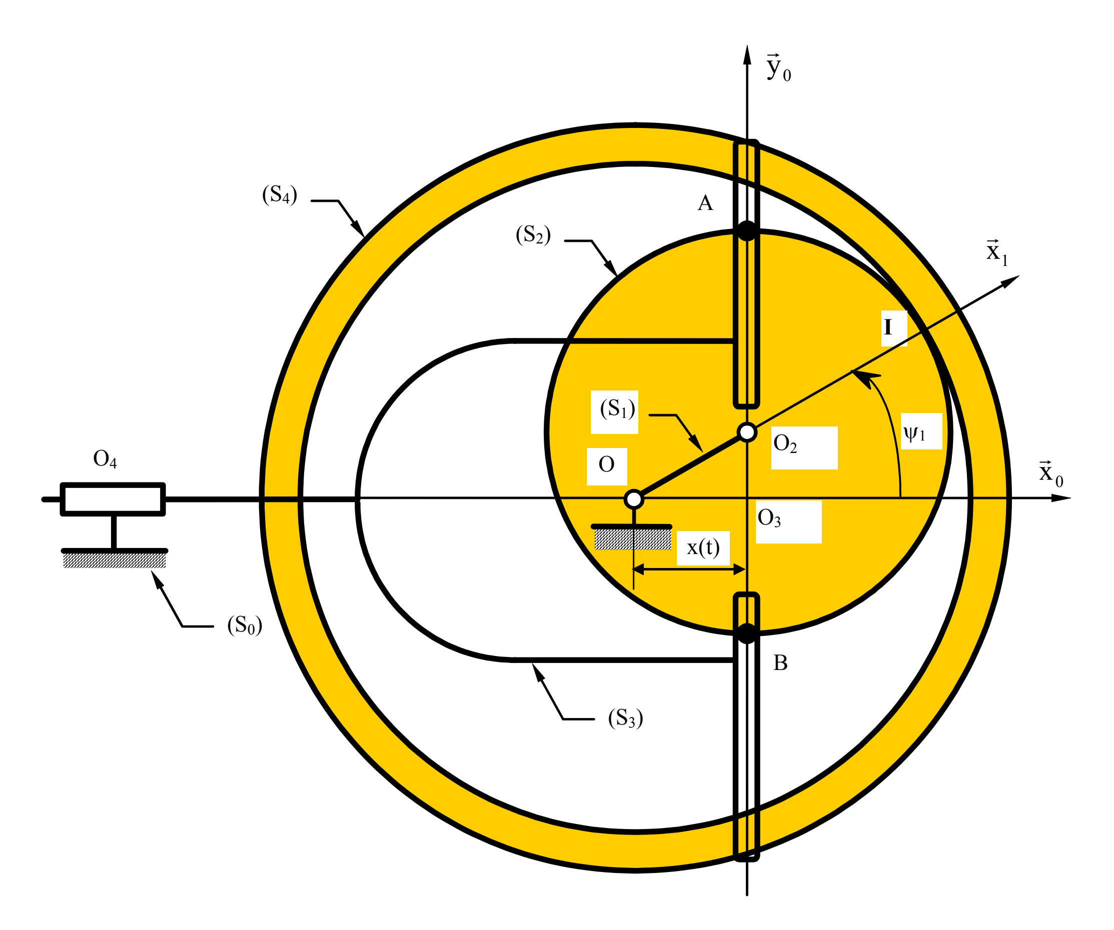


Figure 1

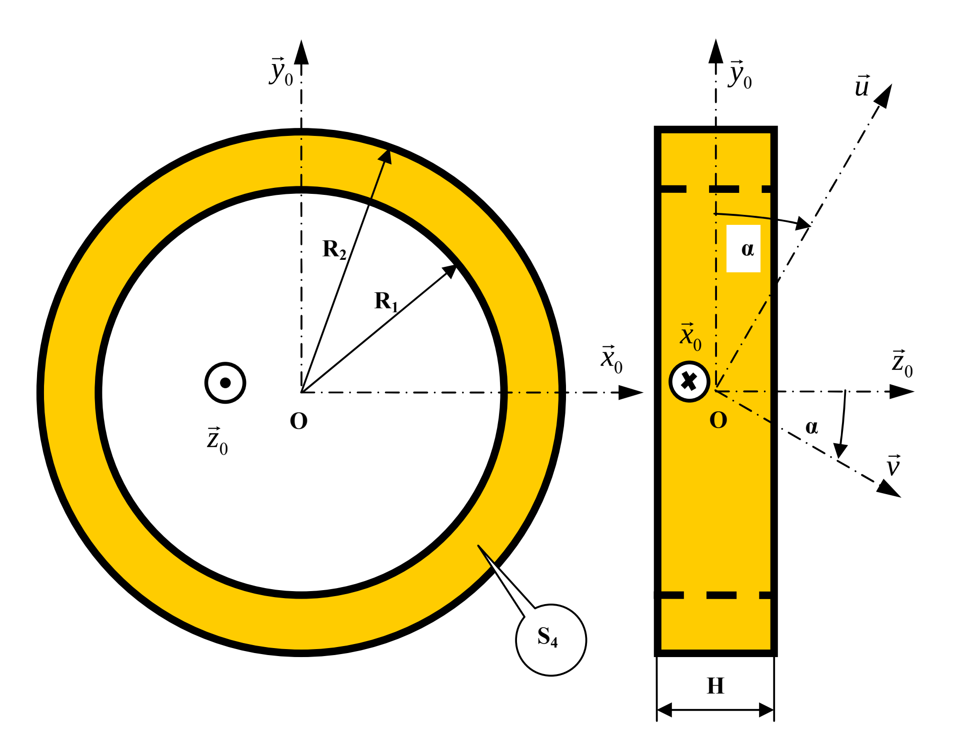


Figure 2

ETUDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE A DISQUE

On désigne par $R(O,\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)$ un repère orthonormé direct dans lequel un point G est défini par $\vec{OG} = d\vec{k}_2$, (d constante positive) et une direction $\vec{n}_3$ définie par $\vec{n}_3 = \cos\alpha\ \vec{k}_3 - \sin\alpha\ \vec{k}_2$ (où α est un angle constant au cours du fonctionnement et compris entre 0 et π).

Un disque D, de centre G, de rayon r, peut tourner librement autour de son axe $(G,\vec{n}_3)$.

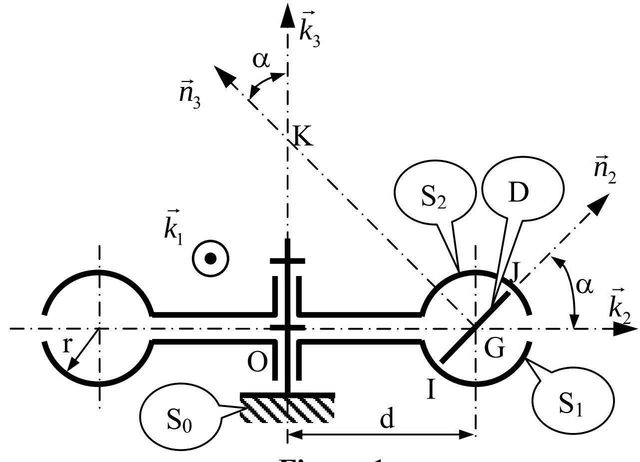


Figure 1

Un solide (S1) en liaison pivot d'axe $(O,\vec{k}_3)$ par rapport à un bâti (S0). On impose à (S1) une vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\ \vec{k}_3$ avec ω_1 une constante positive.

Le solide (S1) comporte un évidement torique dont la ligne moyenne est un cercle de centre O et de rayon d et dont une section est un demi cercle centré en G sur la ligne moyenne et de rayon r. Le disque D et le solide S1 sont en contact ponctuel en un point I tel que $\vec{GI} = -r\ \vec{n}_2$. {Le vecteur $\vec{k}_1$ constitue avec les deux vecteurs $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ une base orthonormée directe : $(\vec{k}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)$ }.

Un solide S2, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{k}_3)$ par rapport à (S0). Il admet une forme obtenue à partir de S1 par symétrie par rapport au plan $(O,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$. Le disque D est en contact ponctuel avec S2 au point J tel que $\vec{GJ} = r\ \vec{n}_2$.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

6)

a) Donner les éléments de réduction, au point O, du torseur cinématique du solide S1 par rapport au repère R : $\{V(S_1/R)\}_O$.

b) Calculer alors le vecteur vitesse au point I du solide S1 par rapport au repère R : $\vec{V}(I \in S_1/R)$

c) Quels sont les axoïdes du mouvement de S1/R.

7) Sachant qu'il y a roulement sans glissement au point I entre le solide S1 et le disque D :

a) Calculer la vitesse au point I du disque D par rapport au repère R : $\vec{V}(I \in D/R)$.

b) Calculer la vitesse instantanée de rotation du disque D par rapport au repère R : $\vec{\Omega}(D/R)$.

c) Donner les éléments de réduction, au point J, du torseur cinématique du disque D par rapport au repère R : $\{V(D/R)\}_J$.

8) Sachant qu'il y a roulement sans glissement au point J entre le disque D et le solide S2 :

a) Donner les éléments de réduction, au point J, du torseur cinématique du solide (S_2) par rapport au repère R : $\{V(S_2/R)\}_J$ (On pourra poser $\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \, \vec{k}_3$ puis calculer la valeur de ω_2).

b) Donner l'expression du rapport des vitesses $\rho = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. Que peut-on conclure ? {On pourra poser $d = k \, r \quad (k > 1)$ }.

9)

a) Donner les éléments de réduction, au point K {intersection de $(G, \vec{n}_3)$ et de $(O, \vec{k}_3)$ }, du torseur cinématique du disque D par rapport au solide (S_1) : $\{V(D/S_1)\}_K$.

b) Quels sont les axoïdes de ce mouvement.

10) Mêmes questions pour $\{V(D/S_2)\}_K$.

Partie II : Géométrie des Masses

Le solide (S_1) est assimilé à un plateau circulaire, homogène de masse m, d'épaisseur négligeable, d'axe $(O, \vec{k}_3)$ et comporte un évidement torique. La ligne moyenne de cet évidement est un cercle de centre O et de rayon d. La section du tore est un demi cercle centré en G sur la ligne moyenne et de rayon r (fig. 1).

4) Donner la forme de la matrice d'inertie de (S_1) au point O dans la base du repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k}_3)$ lié à (S_1) : $[I_O(S_1)]_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k}_3)}$. Justifier votre réponse.

5) Par application du théorème de GULDIN, calculer l'aire de la surface latérale de l'évidement torique.

6) Donner alors l'aire de toute la surface de (S_1).

ETUDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE

On considère le mécanisme de transmission de mouvement schématisé par la figure (1). Le système est constitué des solides suivants :

- **(S_0)** représente le bâti du mécanisme.
- **(S_1)** solide d'entrée du mouvement. Il est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{e}_3)$ avec le bâti et entraîné par un moteur (non représenté) à une vitesse de rotation constante ω.
- **(S_2)** en liaison pivot d'axe $(O,\vec{v}_3)$ avec (S_1). Le solide (S_2) est en contact ponctuel en A avec (S_0) d'une part et en B avec le solide (S_3) d'autre part.
- **(S_3)** solide de sortie du mouvement. Il est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{e}_3)$ avec le bâti.

Repères et paramètres de position

On considère les repères orthonormés directs suivants :

- $R_0(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ repère galiléen lié au bâti **(S_0)**.
- $R_1(O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{e}_3)$ repère lié à **(S_1)** tel que $\psi=(\vec{e}_1,\vec{u}_1)=(\vec{e}_2,\vec{u}_2)$ avec $\dot{\psi}=\omega=cte>0$
- $R_1^*(O,\vec{u}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ deuxième repère lié à **(S_1)** tel que $\theta=(\vec{u}_2,\vec{v}_2)=(\vec{e}_3,\vec{v}_3)$. [$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ est le demi angle au sommet du cône **(S_2)]**
- $R_2(O,\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)$ repère lié au solide **(S_2)** tel que $\varphi=(\vec{u}_1,\vec{w}_1)=(\vec{v}_2,\vec{w}_2)$.
- $R_3(O,\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{e}_3)$ repère lié à **(S_3)** tel que $\gamma=(\vec{e}_1,\vec{k}_1)=(\vec{e}_2,\vec{k}_2)$.

On donne :

$\vec{OA}=R\,\vec{u}_2+\lambda\,\vec{e}_3$; $\vec{OB}=r\,\vec{u}_2+L\,\vec{e}_3$; avec : **R**, **r** et **L** sont des constantes positives : $L<R$.

λ, paramètre de réglage, considéré constant au cours du mouvement : $\lambda\le L$

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide **S_1** par rapport au solide **S_0** au point A : $\{V(S_1/S_0)\}_A$.
2) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide **S_2** par rapport au solide **S_0** aux points A et B : $\{V(S_2/S_0)\}_A$ et $\{V(S_2/S_0)\}_B$.
3) Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide **S_3** par rapport au solide **S_0** au point B : $\{V(S_3/S_0)\}_B$.
4) Sachant que les contacts ponctuels en A entre (S_2) et (S_0) d'une part et en B entre (S_2) et (S_3) d'autre part s'effectuent sans glissement : Donner l'expression du rapport des vitesses $\rho=\dfrac{\dot{\gamma}}{\omega}$. Que peut-on conclure ?
5) Quelles sont les surfaces axoïdes du mouvement du solide **S_2** par rapport au solide **S_0**.

Partie II : Etude cinétique et dynamique

Le solide (S_2) est homogène de masse m, de centre d'inertie G défini par $\overrightarrow{OG} = l\ \vec{v}_3 (l = cte > 0)$ et de matrice d'inertie définie au point O dans la base de son repère par : $[I_O(S_2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3)}$

On suppose que :

- L'action mécanique exercée par le bâti (S_0) sur (S_2) en A est définie par le glisseur
$$\{\mathcal{T}(S_0 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{e}_3)}.$$
- L'action mécanique exercée par la roue (S_3) sur (S_2) en B est définie par le glisseur
$$\{\mathcal{T}(S_3 \to S_2)\}_B = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(B,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{e}_3)}.$$
- La liaison entre (S_1) et (S_2) est pivot parfaite $\{\mathcal{T}(S_1 \to S_2)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{u}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)}$.
- Le champ de la pesanteur est uniforme et défini par le vecteur $\vec{g} = -g\ \vec{e}_3$.
- On note par ***f*** le coefficient de frottement entre (S_2) et le bâti (S_0) d'une part et entre (S_2) et (S_3) d'autre part.

Questions :

1) Déterminer le torseur cinétique et dynamique de (S_2) au point O au cours de son mouvement par rapport au bâti (S_0).

2) Déterminer l'énergie cinétique de (S_2) au cours de son mouvement par rapport au bâti (S_0).

3) A la limite de glissement, écrire les relations scalaires entre les composantes de chaque torseur des actions mécaniques de contact en A et en B qui découlent de l'application de la loi de Coulomb pour le frottement de glissement.

4) Déterminer le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide (S_2) au point O : $\{\mathcal{T}(\bar{S}_2 \to S_2)\}_O$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{e}_3)$.

5) En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique au solide (S_2), au cours de son mouvement par rapport au bâti (S_0), écrire un système de six équations scalaires par projection sur les axes du repère $R_1(O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{e}_3)$.

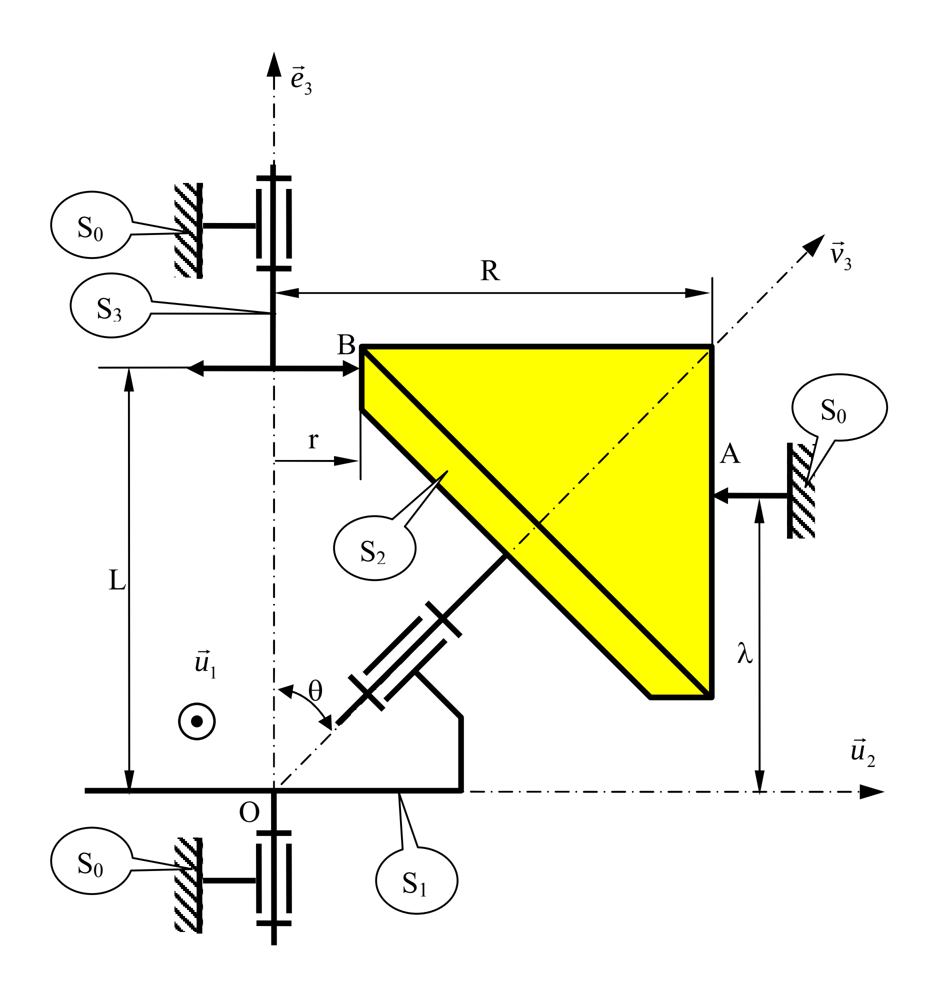
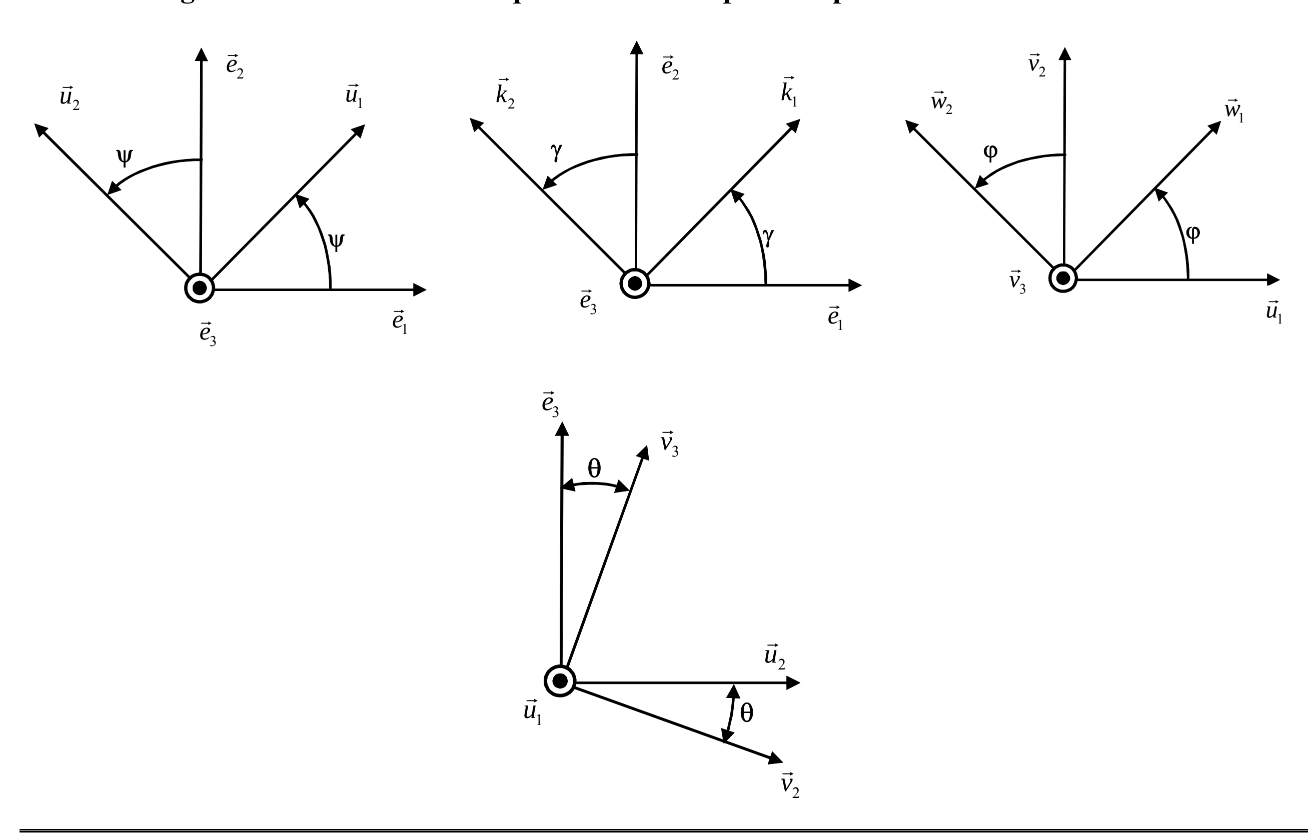


Figure 1 : Schéma cinématique relatif à une position particulière du mécanisme



Partie III : Géométrie des Masses

Le solide (S_2) est composé par des solides élémentaires **homogènes et pleins** suivants (fig. 2) :

* Un cône, noté par (S_{21}), de masse $\mathbf{m_1}$, de hauteur " ***a*** " et de demi – angle au sommet $\theta = \frac{\pi}{4}$.
* Un tronc de cône, noté par (S_{22}), de masse $\mathbf{m_2}$, de hauteur " ***b*** " et de demi – angle au sommet $\theta = \frac{\pi}{4}$.
* Un cylindre, noté par (S_{23}), de masse $\mathbf{m_3}$ et de longueur " ***c*** " et de diamètre " ***d*** ".

On se propose dans cette partie la détermination de la matrice d'inertie du solide (S_2) au point C : $[I_C(S_2)]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$

Pour se faire, on considère dans le plan $(C,\vec{y},\vec{z})$ d'un repère orthonormé direct $R(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, une plaque homogène **(E)** de forme trapézoïdale et d'épaisseur négligeable. Les dimensions de **(E)** sont indiquées sur la figure 3.

1) Déterminer, dans le repère $R(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le centre d'inertie ***G*** de la plaque (**E**).
2) Calculer alors le volume du tronc de cône (**S**) engendré par la rotation de la plaque (**E**) autour de l'axe $(C,\vec{z})$ (figure 4).
3) Donner la forme puis déterminer la matrice d'inertie du tronc de cône **(S)** au point C dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On désigne par ***m*** la masse de **(S)**.
4) Appliquer les résultats obtenus par la question 3, pour déterminer, au point C, les matrices d'inertie relatives au cône **(S_{21})** et au tronc de cône **(S_{22})** dans la base $(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)$: $[I_C(S_{21})]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$ et $[I_C(S_{22})]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$.
5) Donner la matrice d'inertie du cylindre **(S_{23})** au point $\mathbf{G_{23}}$ (centre d'inertie de **(S_{23})**) puis au point C : $[I_{G_{23}}(S_{23})]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$ et $[I_C(S_{23})]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$
6) Calculer alors la matrice d'inertie du solide **(S_2)** au point C : $[I_C(S_2)]_{(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{v}_3)}$.

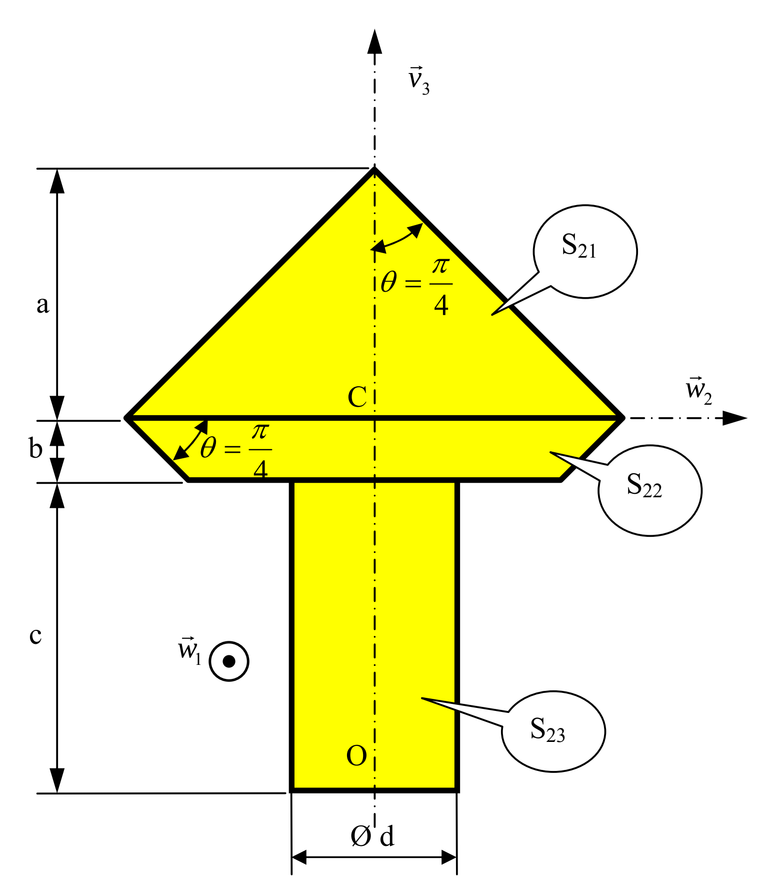


Figure 2: Modélisation du solide (S_2)

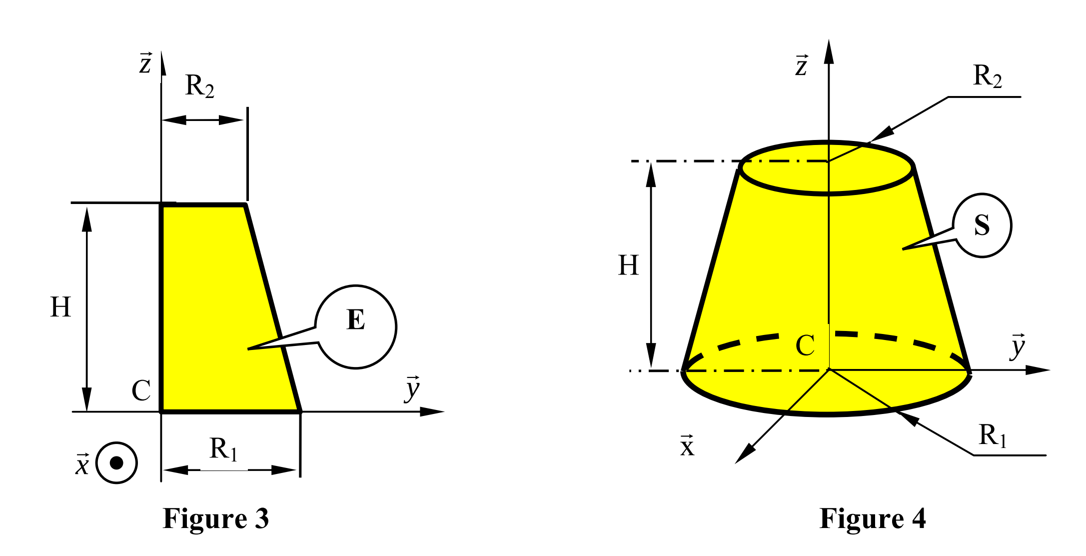


Figure 3 **Figure 4**

ETUDE DE L'ORGANE TERMINAL DU SYSTEME DE PREHENSION SUR LA NAVETTE "HERMES"

Présentation du sujet

La navette spatiale "HERMES" a pour mission de larguer des satellites, déployer des structures, manipuler des objets. Elle est équipée d'un système manipulateur de grande envergure et de grande précision qui devra effectuer des opérations comparables à celles réalisées par un spationaute.

Ce manipulateur est composé de deux parties :

- un bras de grande envergure (5 à 6 mètres) possédant trois (3) degrés de liberté, non schématisé sur la figure [P1],
- un interface standard (compte tenu des différentes missions de HERMES) sur lequel se fixe un organe terminal de grande précision constitué d'un micromanipulateur et d'un préhenseur. Ce micromanipulateur comprend 4 sections : (figure [P1] et [P2]),
  a) Une platine ou table T_1, à un degré de liberté, permettant la rotation d'un plateau inférieur P_i par rapport au bras.
  b) Un hexapode constitué de six (6) vérins qui permet d'animer le plateau supérieur P_s, avec six (6) degrés de liberté par rapport au plateau inférieur à P_i.
  c) Un système dit à cales biaises à deux (2) degrés de liberté, sur lequel est montée une deuxième platine ou table T_2, munie d'un degré de liberté et qui supporte les doigts.
  d) Les doigts du manipulateur.

L'objet de l'étude concerne la partie b de l'organe terminal.

Etude de l'hexapode à vérins

Ce système est constitué de 6 vérins qui relient le plateau supérieur P_s au plateau inférieur P_i (figure [B1] et [B2]). Le but de cette commande est de réaliser un mouvement quelconque de P_s par rapport à P_i.

Pour simplifier le schéma, les vérins sont représentés par les segments A_3B_2, A_2B_1, A_1B_3 et A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1.

Ces vérins seront supposés liés à chacune de leurs extrémités par des liaisons rotules avec les plateaux.

On pose

- $R_s(B_0,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ est le repère lié au plateau supérieur P_s,
- $R_i(A_0,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ est le repère lié au plateau inférieur P_i,
- B_1, B_2, B_3 sont les centres de liaisons au niveau du plateau supérieur P_s. Ils sont distribués à 120° sur un cercle de rayon r et de centre B_0 situés dans le plan $(B_0,\vec{x}_s,\vec{y}_s)$. $\overrightarrow{B_0B_1} = r\,\vec{x}_s$ (figure [B_3]).

- A_1, A_2, A_3 sont les centres de liaisons au niveau du plateau inférieur P_i. Ils sont distribués à 120° sur un cercle de rayon R=2r et de centre A_0 situés dans le plan $(A_0, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$. $\overrightarrow{A_0A_1} = -R\,\vec{x}_i$ (figure [B3], H_1 est le milieu de [A_2, A_3]).

Remarque :

Dans la position initiale, les repères R_s et R_i liés aux plateaux sont parallèles. Le plan (A_2,A_3,B_1) est vertical; $\overrightarrow{A_0B_0} = h\,\vec{z}_i$ et $\overrightarrow{A_0H_1} = r\,\vec{x}_i$

On pourrait montrer qu'à partir d'une position quelconque de P_s/P_i, il est possible en imposant des vitesses des pistons dans les vérins, d'engendrer un mouvement quelconque de P_s/P_i. Les calculs dans ce cas sont assez pénibles. **C'est la raison pour laquelle on va se limiter à établir cette propriété dans la position initiale (R_s et R_i sont parallèles)**.

Etude cinématique

On donne le torseur des vitesses de mouvement de P_s/P_i exprimé dans R_s (dans R_i) :

$\vec{\Omega}(P_s / P_i) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $\vec{V}(B_0 \in P_s / P_i) = (V_1, V_2, V_3)$

En posant $\vec{V}(B_k \in P_s / P_i) = (\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)$ pour k = 1, 2 ,3 :

1) Donner les relations liant ω_j, V_j et $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$; pour $j, k = 1, 2, 3$.

2) Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}^*$ des axes des vérins A_2B_1, noté V et de longueur L, et A_3B_1 noté V^* et de longueur $L^* = L$.

3) Déterminer en fonction des ω_j et des V_j les vitesses α et α^* suivant les axes $\vec{u}$ et $\vec{u}^*$ de ces vérins tel que : $\alpha = \vec{V}(B_1 / S_1).\vec{u}$ et $\alpha^* = \vec{V}(B_1 / S_1^*).\vec{u}^*$

On pourra s'aider éventuellement de la figure [B4] où les deux parties des vérins sont mises en évidence. Le vérin V est constitué de (S_1) et (S_2). Le vérin V^* est constitué de (S^*_1) et (S^*_2).

Envisager les deux cas particuliers suivants :

a) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ et $V_1 = V_2 = 0$ mais $V_3 \neq 0$.

b) $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ et $\omega_1 = \omega_2 = 0$ mais $\omega_3 \neq 0$.

Quelles remarques faites-vous sur la commande des vérins dans ces deux cas.

4) En réalité, ce sont les vérins qui animent le plateau supérieur. Les vitesses de commandes dans les six vérins sont notées : $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*, \lambda$ *et* λ^*.

   a) Trouver la matrice associée à l'application linéaire :

   $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, V_1, V_2, V_3) \mapsto (\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*, \lambda, \lambda^*)$ qui permet de déterminer les vitesses de commandes dans les vérins pour engendrer un torseur cinématique quelconque de mouvement de P_s/P_i.

b) Enoncer la condition pour que la connaissance des vitesses de commandes dans les six (6) vérins permettent de déterminer le torseur des vitesses du plateau P_s par rapport au plateau P_i.

Etude cinétique

Le plateau supérieur P_s est assimilé à un disque plein, homogène, d'épaisseur (e) négligeable devant les autres dimensions et de masse m. On suppose que le point B_0 est le centre d'inertie de ce plateau P_s.

1) Déterminer la matrice d'inertie au point B_0 de P_s.

2) Déterminer le torseur cinétique et dynamique du plateau P_s au point B_0 au cours de son mouvement par rapport au plateau P_i.

3) En déduire son énergie cinétique au cours de son mouvement par rapport à P_i.

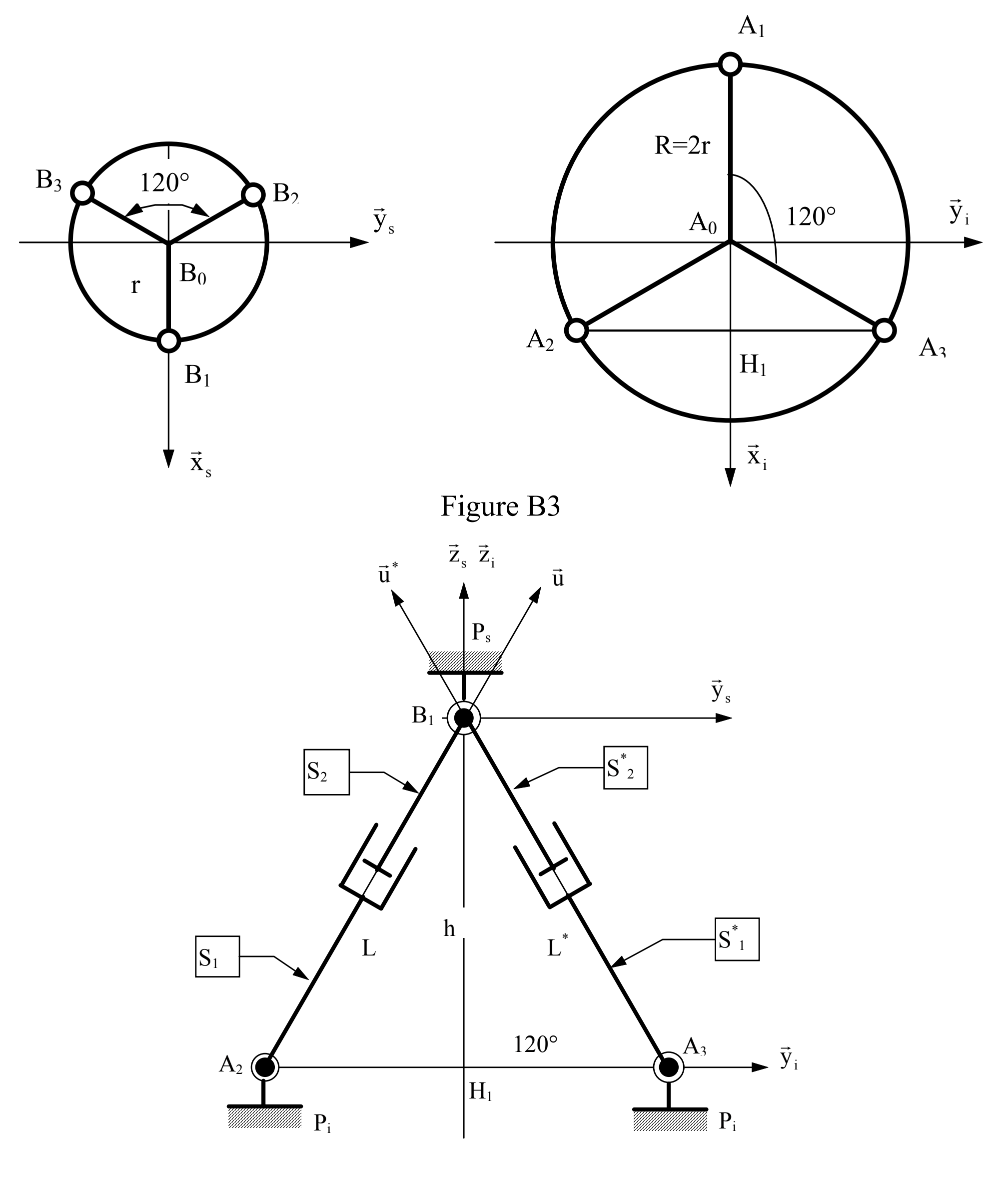


Figure B4

ETUDE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL

On considère le mécanisme schématisé par les figures (1-a et 1-b). Ce système est constitué :

- d'un arbre d'entrée (S_1), coudé en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S_0),
- d'un arbre de sortie (S_2) à axes perpendiculaires, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (S_0),
- d'un plateau (S_3) en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_1^*)$ avec l'arbre coudé (S_1).

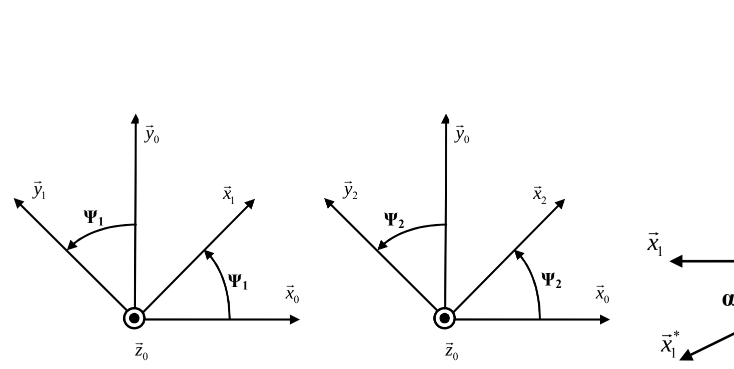
Par ailleurs le plateau (S_3) est en contact ponctuel sans glissement en I avec une roue de centre (O') et de rayon R_0, lié au bâti (S_0). L'axe $(O,\vec{y}_2)$ de l'arbre (S_2) coulisse dans les deux rainures du plateau (S_3) qui définissent le plan $(O,\vec{y}_3,\vec{z}_1^*)$.

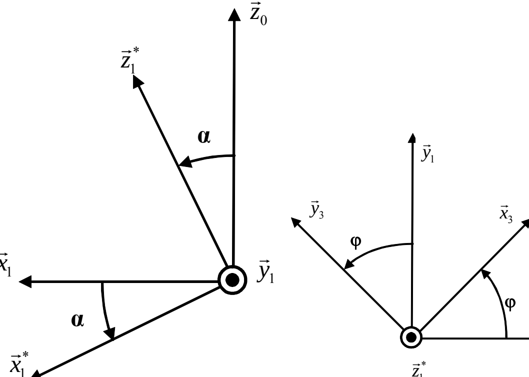
Les caractéristiques géométriques du système sont définies sur les figures 1-a et 1-b.

Paramétrage du système:

- $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère lié au bâti (S_0).
- $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_1) tel que $\psi_1 = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- $R_1^*(O,\vec{x}_1^*,\vec{y}_1,\vec{z}_1^*)$ est le repère lié à (S_1) tel que $\alpha = (\vec{x}_1,\vec{x}_1^*) = (\vec{z}_0,\vec{z}_1^*)$ angle constant.
- $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ est le repère lié à (S_2) tel que $\psi_2 = (\vec{x}_0,\vec{x}_2) = (\vec{y}_0,\vec{y}_2)$.
- $R_3(O_3^*,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_1^*)$ est le repère lié à (S_3) tel que $\varphi = (\vec{x}_1^*,\vec{x}_3) = (\vec{y}_1,\vec{y}_3)$.

On donne : $\overrightarrow{O'I} = R_0\ \vec{x}_1$ $\quad\overrightarrow{O'O} = h\ \vec{z}_0$; $\quad\overrightarrow{O_3^*I} = R_3\ \vec{x}_1^* = (R_0 \cos\alpha + h\sin\alpha)\ \vec{x}_1^*$





Travail demandé

Etude cinématique

1) Exprimer la condition de roulement sans glissement au point I de (S_3) sur (S_0).

2) Exprimer la condition imposée par la liaison (S_2)-(S_3). (On pourra exprimer $\psi_2 - \psi_1$ en fonction de φ).

   ⇒ En déduire le rapport des vitesses $\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1}$ en fonction de φ.

   ⇒ Définir le degré de mobilité du système et préciser ce que cela signifie.

3) Dans le mouvement de (S_3) par rapport à (S_0), définir :

   ⇒ **3-a)** la vitesse de rotation de roulement et de pivotement en I,

   ⇒ **3-b)** les surfaces axoïdes,

   ⇒ **3-c)** l'accélération du point I lié à (S_3).

4) On se propose de définir la vitesse de glissement en l'un des deux points de contact entre (S_2) et (S_3). Soit M, l'un de ces points, défini par $\overrightarrow{OM} = \mu\,\vec{y}_2$

   ⇒ **4-a)** Préciser à quel plan appartient $\vec{V}(M \in S_2 / S_3)$.

   ⇒ **4-b)** Déterminer μ en fonction des paramètres de mouvement et de d (demi-distance entre les rainures).

   ⇒ **4-c)** Exprimer cette vitesse de glissement en fonction de μ, des paramètres de mouvement et de leurs dérivées.
   (On ne vérifiera pas, du fait de la longueur de calculs) que cette vitesse est dans le plan tangent).

Etude dynamique et énergétique

On considère le système Σ formé par les trois solides (S_1), (S_2) et (S_3).

Les caractéristiques d'inertie des éléments constitutifs du système sont les suivantes :

- **Solide (S_1)**
  - Masse et inertie négligeables.
- **Solide (S_2)**
  - Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$ égal à $\mathbf{I_2}$ et une masse $\mathbf{m_2}$,
  - Centre d'inertie $\mathbf{G_2}$ tel que $\overrightarrow{OG_2} = -z_2\ \vec{z}_0$ où z_2 est égale à constante positive.
- **Solide (S_3)**
  - Matrice d'inertie au point O_3^* définie par : $\left[I_{O_3^*}(S_3)\right] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z}_1^*)}$.
  - Masse $\mathbf{m_3}$ et un centre d'inertie $\mathbf{G_3}$ tel que $\overrightarrow{O_3^* G_3} = L\ \vec{z}_1^*$ où L est égale à une constante

positive.

On suppose que :

- L'action mécanique exercée par la roue (S_0) sur (S_3) au point I est donnée par le glisseur $\{\tau(S_0 \to S_3)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$.
- Les liaisons entre les solides (S_1)–(S_0); (S_1)–(S_3) et (S_2)–(S_0) sont considérées parfaites sans frottement.
- L'action de (S_2) sur (S_3) est modélisée par le torseur $\{\tau(S_2 \to S_3)\}_O = \begin{Bmatrix} F_x\vec{x}_2 + F_y\vec{y}_2 + F_z\vec{z}_0 \\ C\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O$.
- Le solide d'entrée de mouvement (S_1) est entraînée en rotation par rapport au bâti (S_0) par un moteur *M* (non représenté) en lui exerçant un torseur couple $\left\{\tau_{M \to S_1}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_m = C_m\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$.
- Sur le solide (S_2) s'exerce, par l'intermédiaire du récepteur de mouvement (non représenté), un torseur couple $\left\{\tau_{Récepteur \to S_2}\right\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_r = C_r\ \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$.
- Le champ de la pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g} = -g\ \vec{z}_0$; *g* est une constante.
- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est considéré galiléen.

On note par $\left\{\tau_{S_i \to S_j}\right\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(A_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)}$ le torseur d'action mécanique dans une liaison de deux solides (S_i) et (S_j) exprimé dans une base $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ au centre géométrique de la liaison A_k. (à préciser avec la base).

Questions

1) Déterminer le torseur cinétique du solide (S_2) au point O au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

2) Déterminer le torseur cinétique du plateau (S_3) au point O_3^* au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

3) Déterminer l'énergie cinétique du système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

4) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ.
5) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques intérieures appliquées au système Σ.
6) Calculer la puissance développée par les efforts extérieurs à Σ au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

7) Calculer la puissance développée par les efforts intérieurs à Σ au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

8) Par application du théorème de l'énergie cinétique au système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère R_0, donner l'expression qui permet de calculer le couple moteur C_m.

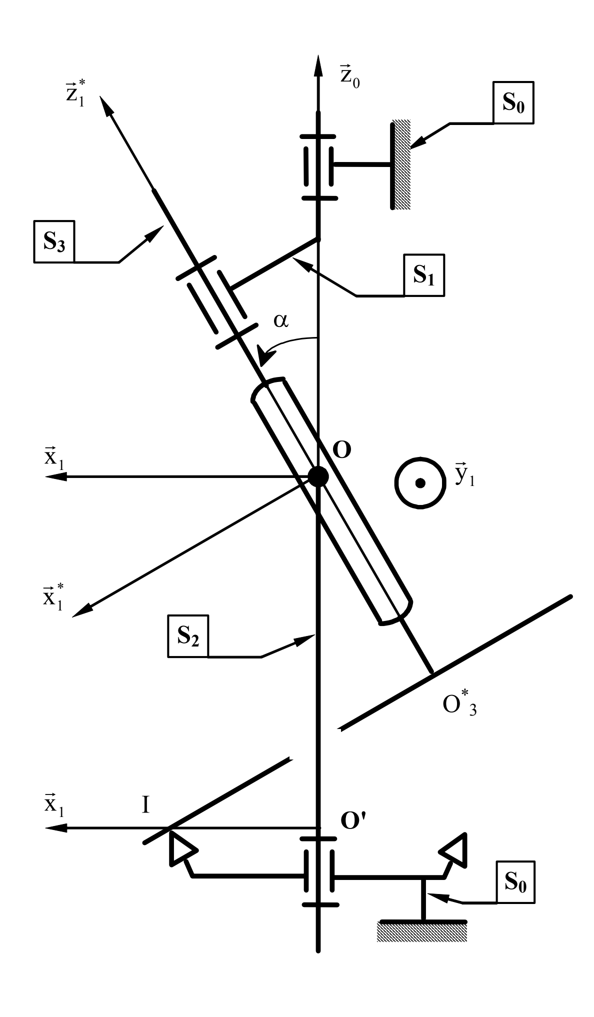


Figure 1-a

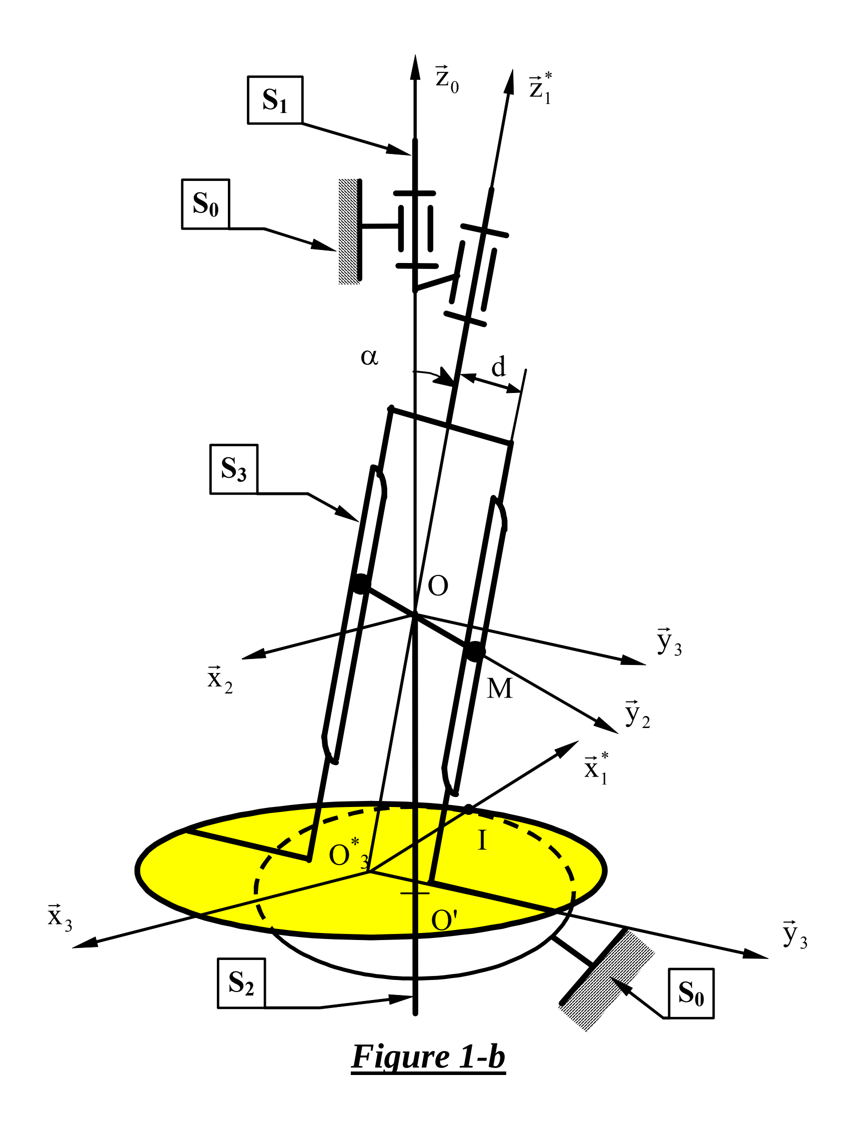


Figure 1-b

ETUDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE A PLATEAUX CONIQUES

Le schéma de la figure (1) représente un variateur de vitesse à bille et plateaux coniques. Un moteur communique à l'arbre d'entrée (S_2) une vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S_2 / R_0) = \omega_2\vec{x}_0$ connue.

L'arbre de sortie (S_3) entraîne un récepteur à la vitesse $\vec{\Omega}(S_3 / R_0) = \omega_3\vec{x}_0$. Le mouvement est transmis par la bille (S_1) qui tourne autour de son centre (O). La vitesse de rotation de la bille sera notée $\vec{\Omega}(S_1 / R_0) = \omega_x\vec{x} + \omega_y\vec{y} + \omega_z\vec{z}$. La bille prend appui sur le galet (S_4) au point K, sur (S_2) en I et sur (S_3) en J. On note $\vec{\Omega}(S_4 / R_0) = \omega_4\vec{x}_0$.

On peut régler le rapport de réduction en déplaçant le galet à l'aide de (S_5), (S_6) et (S_7) qui déplacent la bille (S_1) le long des plateaux coniques.

On notera :

- $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère lié au bâti (S_0),
- $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ est le repère tel que $\vec{x} = \dfrac{\overrightarrow{OI}}{\left\|\overrightarrow{OI}\right\|}$,
- le demi angle au sommet des plateaux $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (α = constante),
- le rayon de la bille : R,
- le rayon du galet (S_4) : R_4,
- $\overrightarrow{O_2I} = -R_2\vec{y}$, $\overrightarrow{O_3J} = R_3\vec{y}$.

On note entre les surfaces de contact (S_1) avec (S_2), (S_3) et (S_4) :

- f : le coefficient de frottement,
- δ : le paramètre de résistance au pivotement,
- η : le paramètre de résistance au roulement.

Questions

Etude cinématique

1) Déterminer les vitesses de glissement $\vec{V}(I \in S_2 / S_1)$, $\vec{V}(J \in S_3 / S_1)$ et $\vec{V}(K \in S_4 / S_1)$.

2) La transmission de mouvement est correcte s'il n'y a pas de glissement. Déterminer le rapport de réduction $\dfrac{\omega_3}{\omega_2}$ en fonction de $\dfrac{R_2}{R_3}$.

3) Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation de (S_1) par rapport au bâti (S_0) : $\vec{\Omega}(S_1 / R_0)$ en fonction de R, R_1, R_2, ω_2 et ω_4.

4) Chercher l'axe central de chacune des pièces en mouvement par rapport à (S_0).

5) Calculer l'accélération des 3 points I, $\{\vec{\Gamma}(I_1 \in S_1 / R_0), \vec{\Gamma}(I_2 \in S_2 / R_0)$ et $\vec{\Gamma}(I / R_0)\}$.

6) Déterminer les vecteurs vitesse de rotation de pivotement, et de roulement de (S_1) par rapport à (S_2), (S_3) et (S_4).

Etude cinétique

La bille (S_1) est pleine, homogène, de centre d'inertie O et de masse m.

1) Déterminer la matrice d'inertie au point O de la bille (S_1).

2) Déterminer le torseur cinétique et dynamique de la bille (S_1) au point O au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

3) Déterminer l'énergie cinétique de la bille (S_1) au cours de son mouvement par rapport au repère R_0.

Etude des actions mécaniques

On suppose qu'aux points I, J et K, le torseur des actions mécaniques exercées respectivement par les solides (S_2), (S_3) et (S_4) sur le solide (S_1) sont de la forme suivante :

$$\left\{\tau_{(S_2/S_1)}\right\}_I = \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(I,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)} , \left\{\tau_{(S_3/S_1)}\right\}_J = \begin{Bmatrix} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ Z_{31} & N_{31} \end{Bmatrix}_{(J,\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)}$$

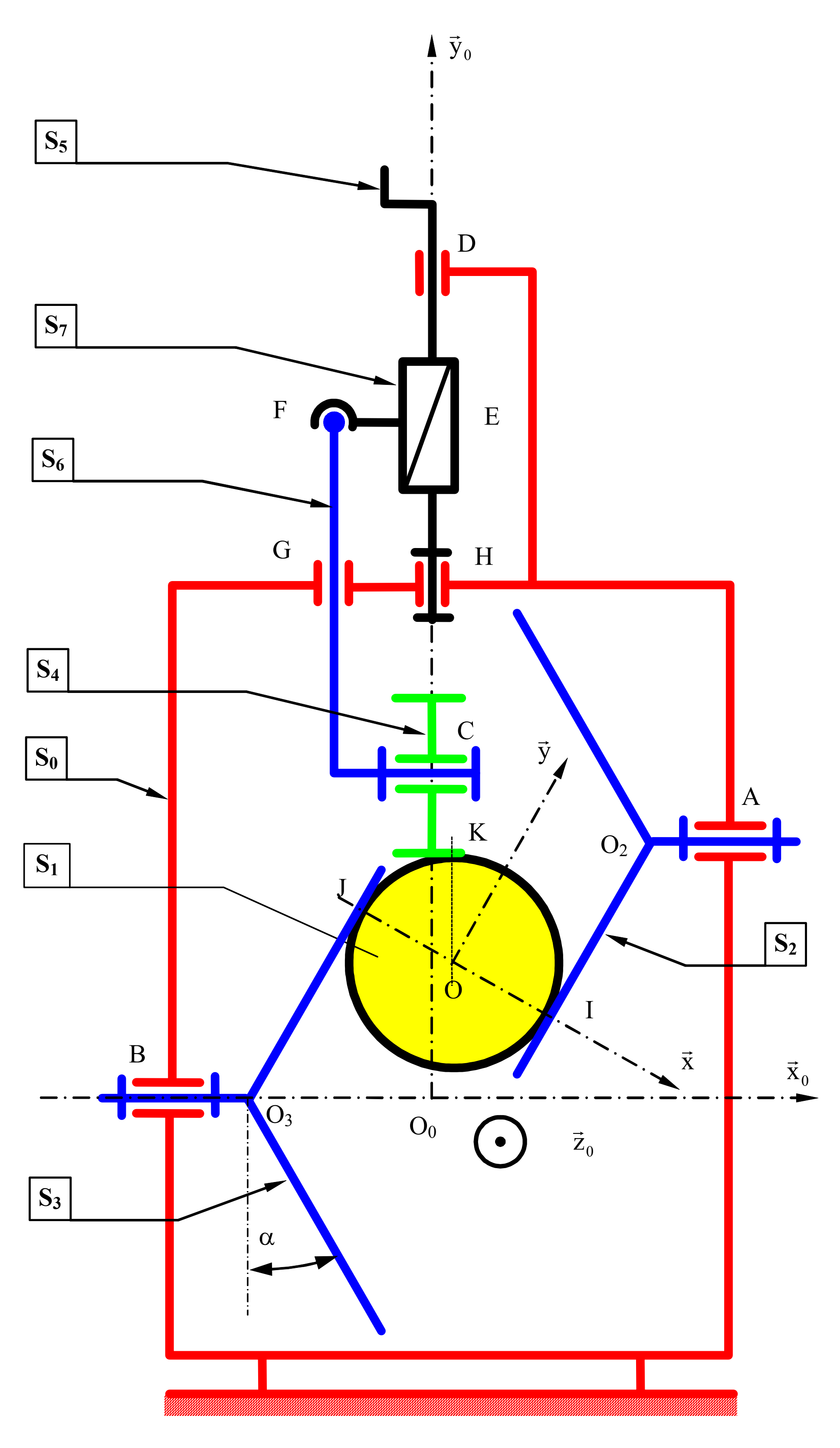
$$\left\{\tau_{(S_4/S_1)}\right\}_K = \begin{Bmatrix} X_{41} & L_{41} \\ Y_{41} & M_{41} \\ Z_{41} & N_{41} \end{Bmatrix}_{(K,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$$

1) Ecrire le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur la bille (S_1),

2) En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la bille (S_1), au cours de son mouvement par rapport au repère R_0, écrire un système de six équations scalaire de liaison.

3) Dans l'hypothèse du roulement et du pivotement sans glissement du solide (S_1) sur les solide (S_2), (S_3) et (S_4), écrire des relations entre les composantes des torseurs des actions mécaniques de contact (Lois de Coulomb pour le frottement de glissement, de roulement et de pivotement).

4) Déterminer les inconnues des liaisons de contact de (S_1) avec les solides (S_2), (S_3) et (S_4) et donner une équation de mouvement de la bille (S_1) par rapport au repère R_0.



$\vec{y}_0$
S5
D
S7
F
E
S6
G
H
S4
C
S0
$\vec{y}$
A
K
O2
S1
J
S2
O
I
$\vec{x}$
B
$\vec{x}_0$
O3
O0
$\vec{z}_0$
S3
α

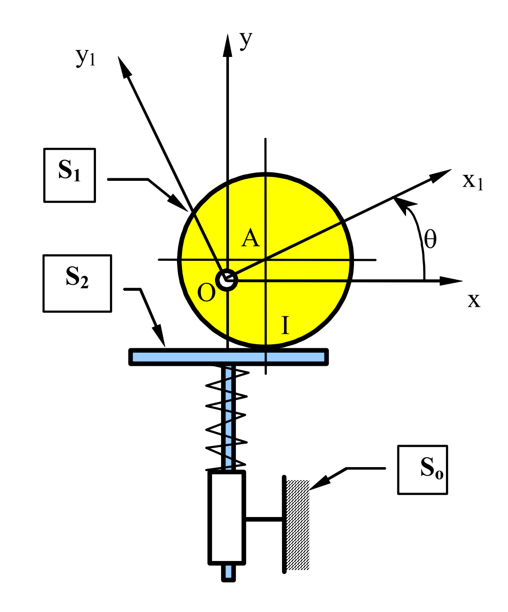
Figure 1

ETUDE DU MECANISME D'ENTRAINEMENT D'UNE POMPE HYDRAULIQUE

Une pompe hydraulique est essentiellement constituée d'un excentrique (S_1) entraîné en rotation par rapport au bâti (S_0) autour de l'axe $(O,\vec{z})$ provoquant un mouvement de translation rectiligne alternatif du piston (S_2). Le rappel de celui-ci est assuré par le ressort.

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti (S_0). L'excentrique est un disque homogène de centre A, de rayon R, d'épaisseur négligeable et de masse m_1. Il est en contact ponctuel au point I avec le piston (S_2).

Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère lié à (S_1) tel que $\overrightarrow{OA} = e.\vec{x}_1$, $e = cte > 0$ et $\vec{z} = \vec{z}_1$. On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x}_1) = \omega t$



Questions :

1. Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}(S_1/R)\right\}_A$ du mouvement de (S_1) par rapport au bâti.

2. Déterminer le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_2)\right\}_O$ du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2).

3. Calculer la vitesse de glissement du mouvement du disque (S_1) par rapport au piston (S_2). $\vec{V}(I \in S_1/S_2)$. Exprimer ce vecteur dans la base du repère R.

4. Déterminer la vitesse du piston (S_2) par rapport au bâti (S_0).

5. Déterminer le Centre Instantané de Rotation "C.I.R" du mouvement du disque (S_1) par rapport au piston (S_2) par la méthode analytique puis par la méthode graphique.

6. Déterminer la base et la roulante du mouvement du disque (S_1) par rapport au piston (S_2).

7. Ecrire la matrice d'inertie de (S_2) au point O.

8. Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe $(O,\ \vec{z})$ au solide (S_1). en déduire une équation du mouvement.

9. Applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $(O,\ \vec{y})$ au solide (S_2). En déduire une équation du mouvement.

ETUDE DU MOUVEMENT D'UN ROULEAU CONIQUE D'UN ROULEMENT

On se propose d'étudier le mouvement d'un rouleau conique (S) du roulement (figure 1) dont les deux bagues (S_1) et (S_2) tournent par rapport au bâti (S_o) (non représenté).

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti (S_o). Les deux bagues (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ avec (S_o). On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1 / R) = \omega_1 \, \vec{x} \\ \vec{\Omega}(S_2 / R) = \omega_2 \, \vec{x} \end{cases}$$

Le rouleau conique (S) de centre d'inertie G et de masse ***m***, roule sans glisser sur (S_1) et (S_2). Soit $R_1(O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ le repère tel que $\overrightarrow{OG} = r\,\vec{y}_1$ $(r > 0)$. Posons $\theta = (\vec{y},\vec{y}_1)$

Le rouleau (S) est de révolution matérielle autour de l'axe $(G,\vec{x}_2)$. Définissons le repère $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_1)$ et posons $\alpha = (\vec{x},\vec{x}_2)$ (l'angle α est constant) et $\vec{\Omega}(S / R_2) = \omega\,\vec{x}_2$.

(R_1 et R_2 sont deux repères liés à la cage).

Considérons le cercle de section droite du rouleau conique (S) situé dans le plan $(G,\vec{y}_2,\vec{z}_1)$. Notons I et J les deux points de contact de ce cercle avec (S_1) et (S_2), et ***a*** son rayon.

Pour simplifier les calculs on pose : $\begin{cases} \overrightarrow{OI} \bullet \vec{y}_1 = r_1 = r - a\cos\alpha \\ \overrightarrow{OJ} \bullet \vec{y}_1 = r_2 = r + a\cos\alpha \end{cases}$

Etude cinématique

1) Déterminez les torseurs cinématique au point O de (S_1) et de (S_2) dans leur mouvement par rapport à R : $\{\mathcal{V}(S_1 / R)\}_O$ et $\{\mathcal{V}(S_2 / R)\}_O$. En déduire les vecteurs vitesses aux points I et J : $\vec{V}(I \in S_1 / R)$ et $\vec{V}(J \in S_2 / R)$.
2) Déterminez le torseur cinématique au point G de (S) dans son mouvement par rapport à R : $\{\mathcal{V}(S / R)\}_G$. En déduire les vecteurs vitesses aux points I et J : $\vec{V}(I \in S / R)$ et $\vec{V}(J \in S / R)$.
3) Exprimez la condition de roulement sans glissement au point I en fonction de $\dot{\theta},\omega,\omega_1,r_1$ et a.
4) Exprimez la condition de roulement sans glissement au point J en fonction de $\dot{\theta},\omega,\omega_2,r_2$ et a.
5) Déduire, des questions 3 et 4, l'expression des vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et ω en fonction de $\omega_1,\omega_2,r_1,r_2$ et a.
6) Calculez l'accélération du point G par rapport à R : $\vec{\Gamma}(G / R)$.

Géométrie des masses

Dans le but de déterminer la position du centre d'inertie G du rouleau conique **(S)** de la figure 1, on considère dans un plan défini par $(A,\vec{y},\vec{z})$ une plaque homogène (**E_1**) de forme trapézoïdale et d'épaisseur négligeable. Les dimensions de (**E_1**) sont indiquées sur la figure 2.

1) Déterminer, dans le repère $R(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, le centre d'inertie $\boldsymbol{G_1}$ de la plaque ($\mathbf{E_1}$).
2) En déduire le volume du tronc de cône ($\mathbf{E_2}$) engendré par la rotation de la plaque ($\mathbf{E_1}$) autour de l'axe $(A,\vec{z})$ (figure 3).
3) Déterminer la position du centre d'inertie **G** du tronc de cône ($\mathbf{E_2}$).

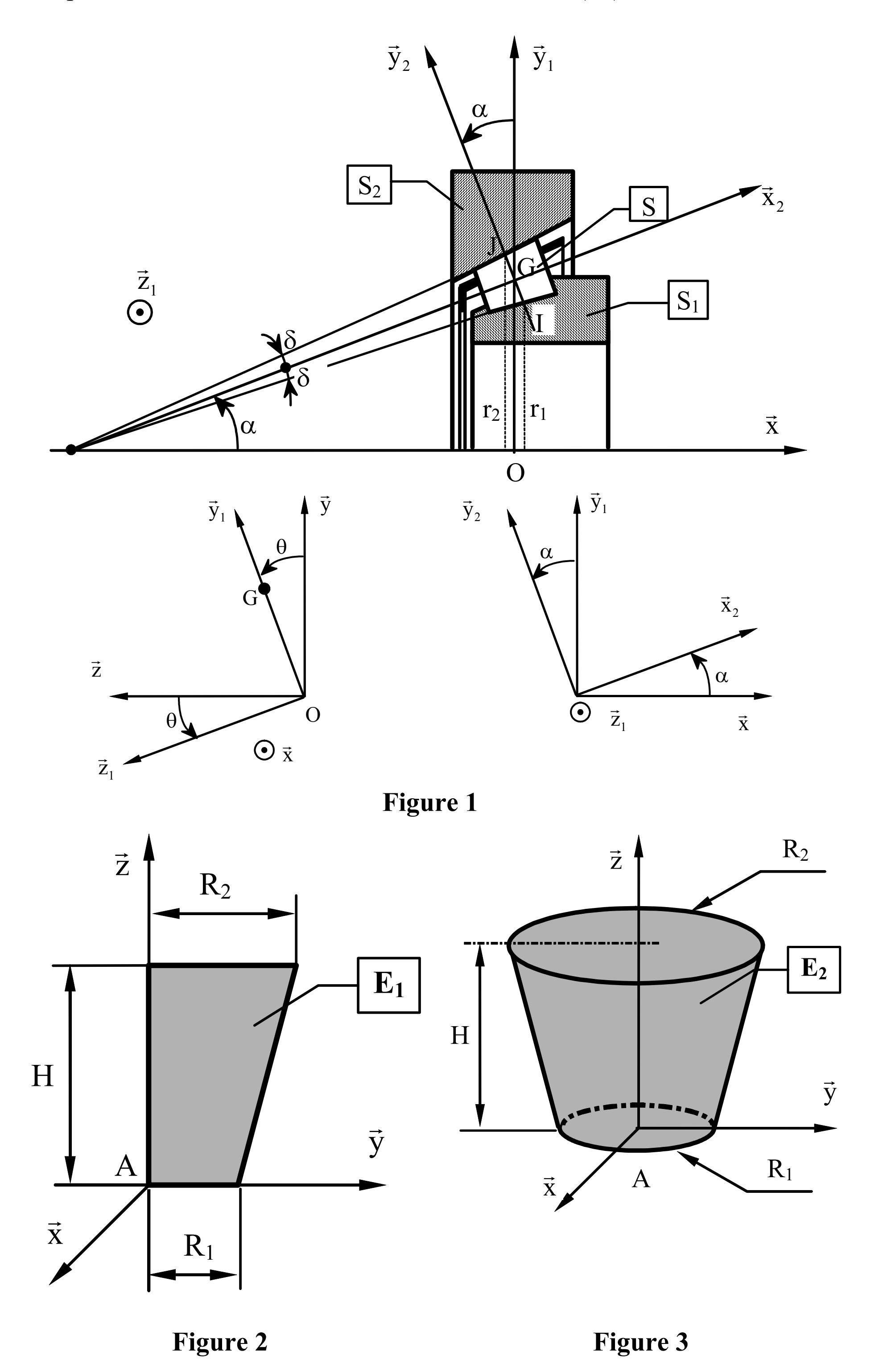


Figure 1

Figure 2

Figure 3

ETUDE D'UN VARIATEUR DE VITESSE « PATIN »

On se propose d'étudier le variateur de vitesse « Patin » schématisé par la figure 1.

Le variateur est composé des solides suivants :

- **(S_0)** : bâti du variateur auquel est associé le repère galiléen $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.
- **(S_1)** : l'arbre d'entrée du variateur auquel est associé le repère $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. ($S_1$) est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0). On pose $\vec{\Omega}(S_1/S_0)=\omega_1\,\vec{x}_0$ avec $\omega_1=\dot{\psi}_1$ et $\psi_1=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$.
- **(S_2)** : l'arbre de sortie du variateur auquel est associé le repère $R_2(O,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. ($S_2$) est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0). On pose $\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\omega_2\,\vec{x}_0$ avec $\omega_2=\dot{\psi}_2$ et $\psi_2=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$
- **(S)** : un pignon satellite en liaison pivot d'axe $(B,\vec{x}_0)$ avec un porte satellite **(PS)**, engrenant en **J** avec une roue dentée liée à **(S_1)** et en **K** avec une couronne à denture intérieure liée à **(S_0)** (voir figure 2). On désigne par $R(B,\vec{x}_0,\vec{y},\vec{z})$ le repère lié à **(S)** tel que $\varphi=(\vec{y}_0,\vec{y})=(\vec{z}_0,\vec{z})$.

  On désigne respectivement par :

  √ **A** et **R** le centre et le rayon de la roue dentée liée à **(S_1).** Le point **A** est sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$.

  √ **B** et **r** le centre et le rayon du satellite **(S).**

Nous admettons qu'il y a roulement sans glissement aux points de contact de **(S)** avec **(S_1)** en **J** et de **(S)** avec **(S_0)** en **K**.

- **(PS)** : porte satellite du variateur, en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0). On désigne par $R_3(O,\vec{x}_0,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ le repère lié à **(PS)** tel que $\psi_3=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)=(\vec{z}_0,\vec{z}_3)$. On pose $\vec{\Omega}(PS/S_0)=\omega\,\vec{x}_0$ avec $\omega=\dot{\psi}_3$.

Le porte satellite **(PS)** supporte des galets orientables tel que le galet schématisé sur la figure 1.

Le **galet** de rayon « **a** », de centre « **C** » tel que $\overrightarrow{OC}=l\,\vec{y}_3\ \ (l>0)$, roule sans glisser en $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$ sur deux surfaces toriques liés à **(S_1)** et **(S_2)**.

Soit $R_4(C,\vec{i},\vec{j},\vec{z}_3)$ le repère tel que $(C,\vec{i})$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{I_1I_2}$. On pose $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{i})=(\vec{y}_3,\vec{j})$. L'angle α est réglable mais supposé constant au cours du fonctionnement.

Le **galet** a une liaison pivot d'axe $(C,\vec{j})$ avec le porte satellite **(PS)**. On pose $\vec{\Omega}(Galet/PS)=\Omega\,\vec{j}$.

On donne : $\overrightarrow{AJ}=-R\,\vec{y}_3$; $\overrightarrow{BJ}=r\,\vec{y}_3$; $\overrightarrow{BK}=-r\,\vec{y}_3$

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) au point J: $\{V(S_1/S_0)\}_J$.
2) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à (S_0) au point K: $\{V(S/S_0)\}_K$.
   Déduire alors $\vec{V}(J \in S/S_0)$.
3) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (PS) par rapport à (S_0) au point B: $\{V(PS/S_0)\}_B$.
4) En exprimant la condition de roulement sans glissement au point de contact J de (S_1) avec (S) déterminer le rapport des vitesses $\dfrac{\dot{\varphi}}{\omega_1}$ en fonction de r et R.
5) En exprimant la condition de roulement sans glissement au point de contact K de (S) avec (S_0) déterminer le rapport des vitesses $\dfrac{\dot{\varphi}}{\omega}$ en fonction de r et R.
6) Déduire de (4) et de (5) le rapport des vitesses de rotation $\dfrac{\omega}{\omega_1}$.
7) Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_1 du galet avec (S_1).
8) Déterminer la relation scalaire qui traduit le non glissement au point de contact I_2 du galet avec (S_2).
9) Déterminer le rapport de variation des vitesses de rotation $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$.

Partie II : Géométrie des Masses

On se propose, dans cette partie, de déterminer la matrice d'inertie de la surface torique de (S_2) schématisée par la figure 3.

Il s'agit d'un demi tore creux, homogène, d'axe $(O,\vec{x}_0)$, de masse m et d'épaisseur négligeable. Les dimensions sont indiquées sur la figure 3.

On désigne par **(ST)** cette surface torique.

1) Déterminer, par application du théorème de GULDIN, l'aire de la surface latérale de (ST).
2) Donner et justifier la forme de la matrice d'inertie de **(ST)** au point O dans la base du repère $R_2(O,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.
3) Calculer les termes de cette matrice d'inertie au point O : $[I_O(ST)]_{(\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}$.

On donne :

$$\int (R - r\cos(t))^3 dt = R^3 t - 3rR^2\sin(t) + \frac{3}{2}r^2 R[\cos(t)\sin(t) + t] - \frac{1}{3}r^3[\cos(t)^2\sin(t) + 2\sin(t)]$$

$$\int \sin(t)^2 (R - r\cos(t))dt = \frac{1}{2}R[t - \cos(t)\sin(t)] - \frac{1}{3}r\sin(t)^3$$

Partie III : Etude dynamique

Dans la suite du problème, on désigne par ***m*** et ***G*** la masse et le centre d'inertie de (S_2) et par $[I_O(S_2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$ sa matrice d'inertie au point O. On pose $\overrightarrow{OG} = c\,\vec{x}_0$ avec c une constante positive.

Le solide (S_2) est soumis à une action mécanique exercée par un récepteur (non représenté) en lui exerçant un torseur couple $\left\{\tau_{Récepteur \to S_2}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_r\ \vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_O$.

L'action mécanique du **Galet** sur (S_2) au point I_2 est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{Galet \to S_2}\right\}_{I_2} = \left\{\begin{matrix} N\ \vec{i} + T\ \vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_2}$.

L'action mécanique de (S_0) sur (S_2) au point O est modélisée par le torseur $\left\{\tau_{S_0 \to S_2}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{matrix}\right\}_{(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$.

Le champ de pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g} = -g\ \vec{y}_0$; g est une constante.

15) Déterminer le torseur cinétique et le torseur dynamique au point O de (S_2) au cours de son mouvement par rapport à (S_0).
16) Déterminer l'énergie cinétique de (S_2) au cours de son mouvement par rapport à (S_0).
17) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur (S_2).
18) Ecrire les équations scalaires déduites de l'application du principe fondamental de la dynamique à (S_2) au cours de son mouvement par rapport à (S_0).

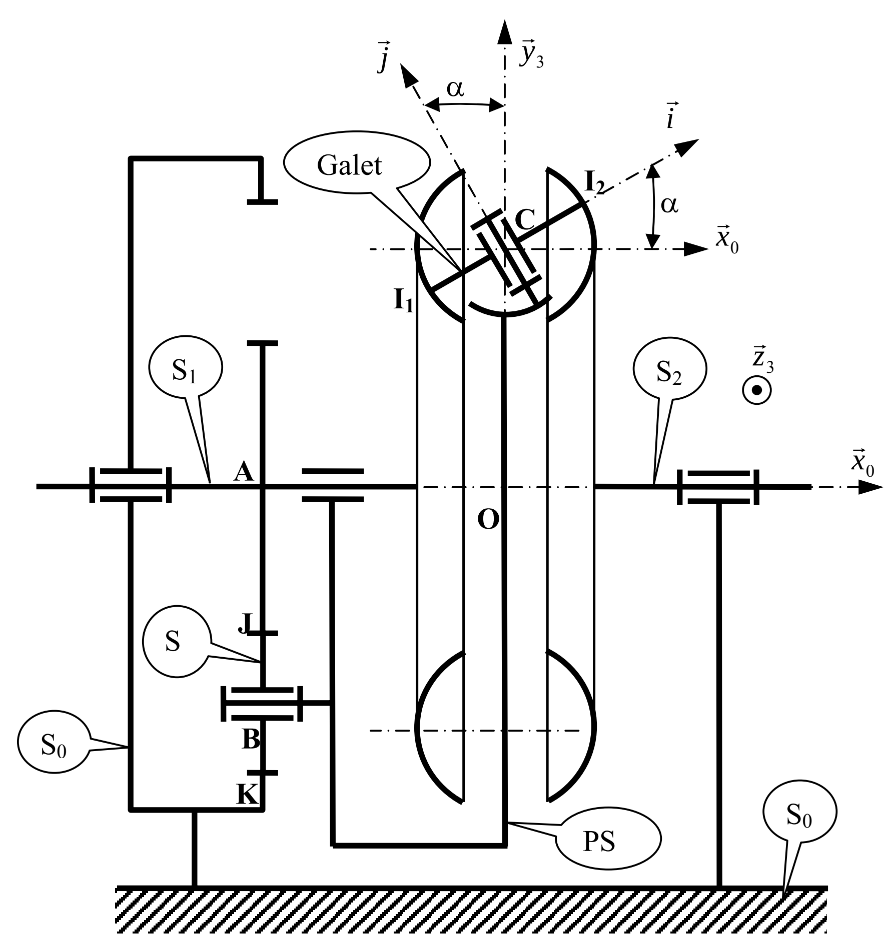


Figure 1

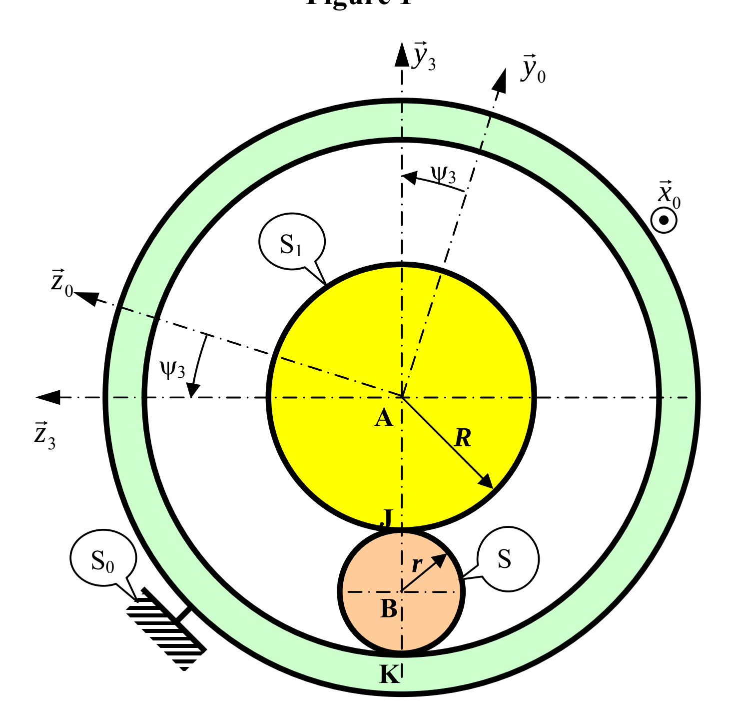
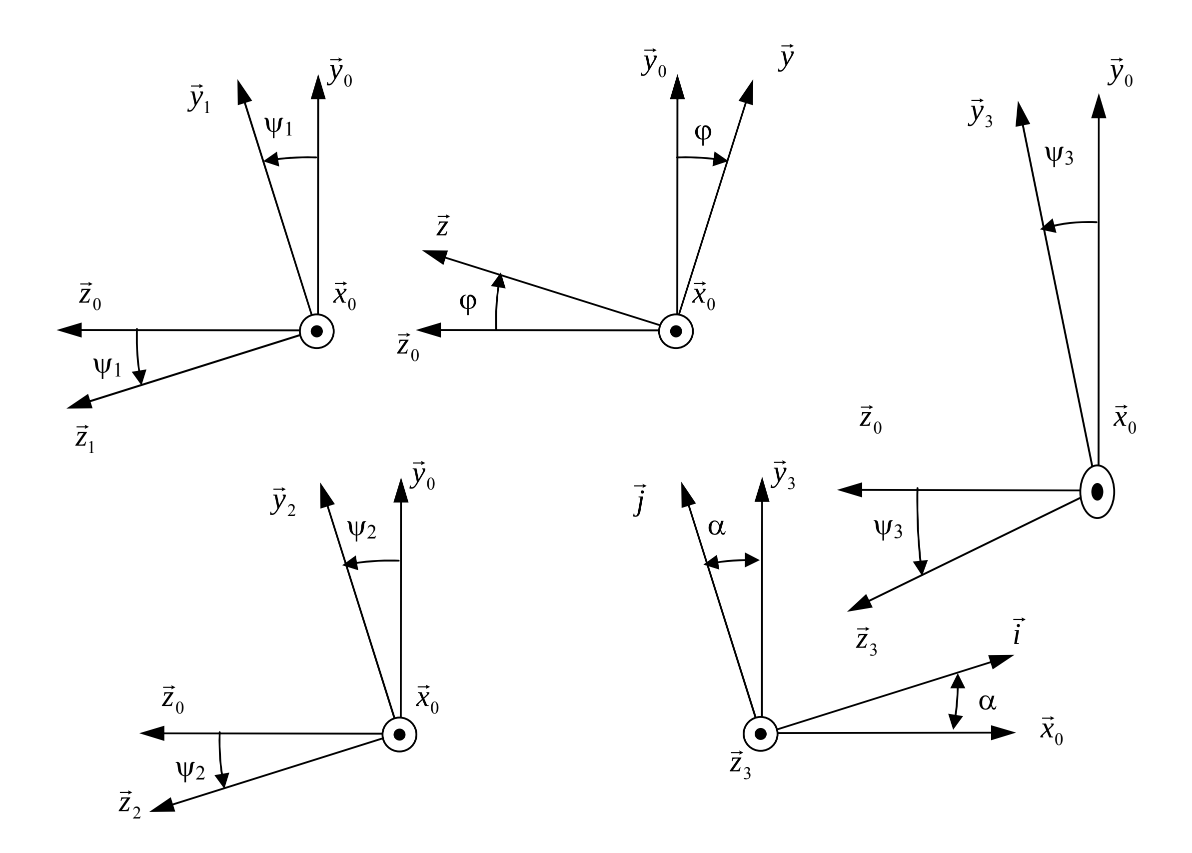


Figure 2



Positions relatives des bases des repères introduits

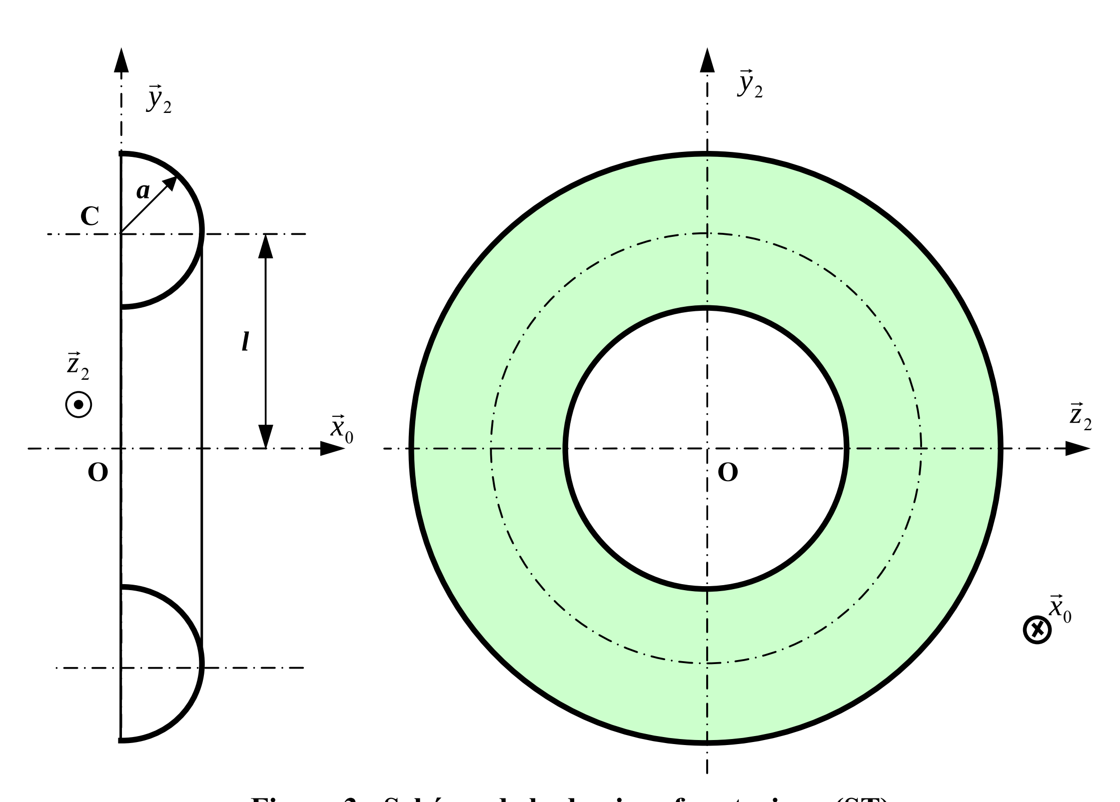


Figure 3 : Schéma de la demi surface torique (ST)

ETUDE D'UN GALET RALENTISSEUR

EXTRAIT DU CONCOURS STI – SESSION 2008

C-1. Mécanique Générale

Dans cette partie on se propose d'étudier le mécanisme du galet ralentisseur destiné au ralentissement du mouvement de la palette **P**. Le mouvement du mécanisme est ramené dans le plan $(O_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ de normale $(O, \vec{x}_0)$. Le schéma cinématique du mécanisme est représenté par la **figure C-1-1**.

Le système est principalement constitué des solides suivants :

- **(S_0)** solide fixe par rapport à la terre qui représente l'ensemble formé par les pièces **21, 22 et R** du dessin d'ensemble.
- **(S_1)** solide en liaison glissière d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ avec **(S_0).** Le solide **(S_1)** représente l'ensemble formé par les pièces **13, 16, et 20** du dessin d'ensemble.
- **(S_2)** cylindre creux, de longueur L_2, de rayon intérieur r_2 et de rayon extérieur R_2, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le solide **(S_1)**. Le solide **(S_2)** représente l'ensemble formé par les pièces **1 et 10** du dessin d'ensemble.
- **(S_3)** solide en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le solide **(S_1)**. Le solide **(S_3)** représente le porte–mâchoire **6** du dessin d'ensemble.
- **(S_4)** solide en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_0)$ avec le solide **(S_3)**. Le solide **(S_4)** représente la mâchoire **7** et la masselotte **8** du dessin d'ensemble.
- **(S_5)** solide en mouvement de translation rectiligne par rapport à **(S_0)** suivant l'axe $(O_0, \vec{y}_0)$. Le solide **(S_5)** représente la palette **P**. Le contact entre **(S_5)** et **(S_2)** est supposé ponctuel de normale $(C, \vec{z}_0)$. Le mouvement de **(S_5)** par rapport à **(S_2)** au point de contact **C** est sans glissement.

Le mécanisme comporte deux ressorts :

Ressort 9 attaché par ses deux extrémités **B** et **G** aux solide **(S_3)** et **(S_4)**.

Ressort 23 monté entre les deux solides **(S_0)** et **(S_1)**

Repères et paramètres de position (Fig. C-1-1 ; Fig. C-1-2)

On considère les repères orthonormés directs suivants :

$R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère galiléen associé au solide **(S_0)**.

$R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère associé au solide **(S_1)** tel que $\overrightarrow{O_0O} = \lambda \, \vec{z}_0$.

$R_2(O, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère associé au solide **(S_2)** tel que $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$.

$R_3(O, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère associé au solide **(S_3)** tel que $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$ et $\dfrac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = k$ (k = constante positive donnée).

$R_4(O, \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ repère associé au solide **(S_4)** tel que $\psi = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.

Pour paramétrer le contact, supposé ponctuel en I entre les solides **(S_2)** et **(S_4)**, on introduit la base orthonormée directe $(\vec{x}_0, \vec{t}, \vec{n})$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal en I au plan tangent commun entre **(S_2)** et **(S_4)** et tel que $\alpha = (\vec{y}_4, \vec{t}) = (\vec{z}_4, \vec{n})$ (angle constant).

On donne :

$\vec{OC} = R_2\,\vec{z}_0$; $\vec{OI} = r_2\,\vec{n}$; $\vec{AI} = -a\,\vec{y}_4 + b\,\vec{z}_4$; $\vec{AG} = -c\,\vec{y}_4$; $\vec{OA} = r\,\vec{y}_3$ où ***a, b, c, r, r_2 et R_2*** *sont des constantes positives données.*

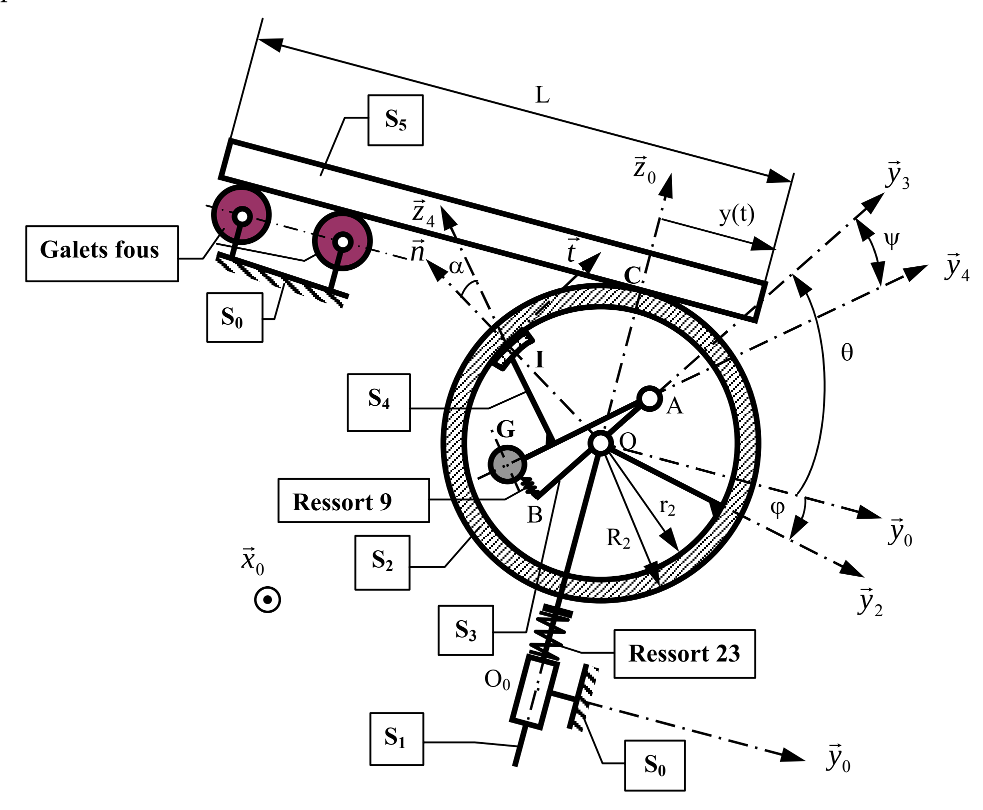


Figure C-1-1 : Schéma cinématique relatif à la position de ralentissement

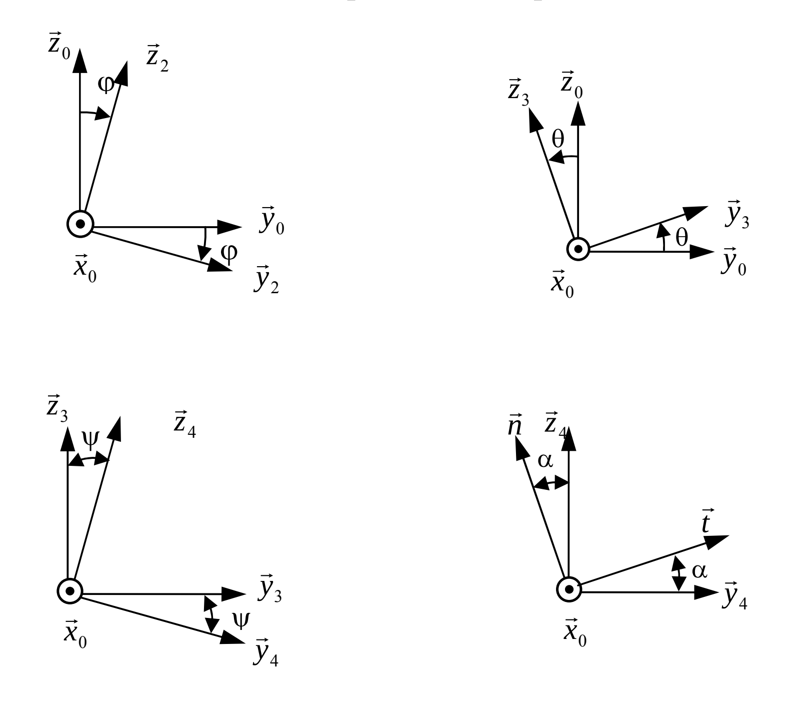


Figure C-1-2 : Positions relatives des bases des repères

C-1-1) Etude cinématique

Durant le ralentissement du mouvement du solide **(S$_5$)**, le point O du repère $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est supposé maintenu fixe dans le repère $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Ceci conduit à considérer que le repère $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est galiléen.

C-1-1-1 Ecrire la relation vectorielle qui exprime la fermeture géométrique de la chaîne formée par les solides **{S$_1$, S$_2$, S$_3$, S$_4$}**. Déduire alors que la valeur de l'angle ψ est égale à une constante.

C-1-1-2 Exprimer le module du vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction de ***c, r*** et ψ. On note, dans la suite, par « ***e*** » la valeur de ce module : $e = \left\|\overrightarrow{OG}\right\|$.

C-1-1-3 Déterminer les torseurs cinématiques associés aux mouvements suivants :

a) mouvement de **(S$_2$)** par rapport à **(S$_1$)** au point O : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_O$.

b) mouvement de **(S$_3$)** par rapport à **(S$_1$)** au point O : $\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\}_O$.

c) mouvement de **(S$_4$)** par rapport à **(S$_1$)** au point A : $\{\mathcal{V}(S_4/S_1)\}_A$.

C-1-1-4 En déduire les vecteurs des vitesses suivantes :

a) $\vec{V}(C\in S_2/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

b) $\vec{V}(I\in S_2/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{t},\vec{n})$.

c) $\vec{V}(A\in S_3/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$.

d) $\vec{V}(O\in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$

e) $\vec{V}(G\in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{y}_4,\vec{z}_4)$.

f) $\vec{V}(I\in S_4/S_1)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{t},\vec{n})$.

C-1-1-5 Déterminer alors :

a) Le vecteur vitesse de glissement au point I de **(S$_4$)** par rapport à **(S$_2$)** : $\vec{V}(I\in S_4/S_2)$ exprimé dans la base $(\vec{x}_0,\vec{t},\vec{n})$.

b) La condition de roulement sans glissement au point C de **(S$_2$)** par rapport à **(S$_5$)**.

C-1-2) Etude dynamique et énergétique

Nous supposons dans cette partie les hypothèses suivantes :

A l'exception des solides **(S$_2$)**, **(S$_4$)** et **(S$_5$)**, les masses des autres solides et des deux ressorts sont supposées négligeables.

La masse **m$_4$** du solide **(S$_4$)** est concentrée au point **G**.

Le solide **(S$_2$)** est un cylindre homogène creux, de longueur $\boldsymbol{L_2}$, d'axe $(O,\vec{x}_0)$, de masse $\boldsymbol{m_2}$, de rayon intérieur $\boldsymbol{r_2}$ et de rayon extérieur $\boldsymbol{R_2}$. Son moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_0)$ est noté par $\boldsymbol{I_2}$.

L'action mécanique du champ de la pesanteur est négligeable.

Nous admettons l'écriture des torseurs des actions mécaniques suivantes :

L'action mécanique exercée par la palette **(S5)** sur **(S2)** est définie au point **C** par le torseur glisseur $\{\mathcal{T}(S_5 \rightarrow S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} -N_C\,\vec{z}_0 + T_C\,\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ avec $N_C > 0$ et $T_C > 0$.

L'action mécanique exercée par **(S4)** sur **(S2)** est définie au point **I** par le torseur glisseur $\{\mathcal{T}(S_4 \rightarrow S_2)\}_I = \begin{Bmatrix} N_I\,\vec{n} + T_I\,\vec{t} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ avec $N_I > 0$. Le signe de T_I est à déterminer.

L'action mécanique exercée par **(S3)** sur **(S4)** est définie au point **A** par le torseur glisseur $\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_4)\}_A = \begin{Bmatrix} Y_{34}\,\vec{y}_3 + Z_{34}\,\vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$.

L'action mécanique exercée par le **Ressort 9** sur **(S4)** est définie au point **G** par le torseur glisseur $\{\mathcal{T}(9 \rightarrow S_4)\}_G = \begin{Bmatrix} -F\,\vec{z}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$.

- Le coefficient d'adhérence au point de contact **C** entre le solide **(S5)** et le solide **(S2)** est noté par f_C.
- Le coefficient de frottement au point de contact **I** entre le solide **(S4)** et le solide **(S2)** est noté par f_I.
- Toutes les autres liaisons sont considérées parfaites.

C-1-2-1 Déterminer le moment d'inertie $\mathbf{I_2}$ de **(S2)** par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_0)$.

C-1-2-2 Déterminer, dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, les torseurs cinétique et dynamique au point **O** de **(S2)** au cours de son mouvement par rapport à par à **(S1) :** $\{\mathcal{C}(S_2/S_1)\}_O$ et $\{\mathcal{D}((S_2/S_1)\}_O$.

C-1-2-3 Déterminer, dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, les torseurs cinétique et dynamique au point **A** de **(S4)** au cours de son mouvement par à **(S1) :** $\{\mathcal{C}(S_4/S_1)\}_A$ et $\{\mathcal{D}(S_4/S_1)\}_A$.

C-1-2-4 Déterminer l'énergie cinétique du système Σ composé par les solides **{(S2), (S3), (S4) et le ressort 9}** au cours de son mouvement par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Exprimer cette énergie en fonction de ***I2, m4, e, k*** et $\dot{\varphi}$.

C-1-2-5 En appliquant la loi de Coulomb pour le frottement de glissement au point de contact **I** entre **(S4)** et **(S2),** écrire la relation entre les composantes N_I et T_I du torseur d'action mécanique de **(S4)** sur **(S2)**.

C-1-2-6 Faire le bilan et écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur **(S4)**. Déterminer alors le moment résultant de ces actions au point **A** : $\vec{\boldsymbol{m}}_A(\overline{S}_4 \rightarrow S_4)$.

C-1-2-7 Par projection sur l'axe $(A, \vec{x}_0)$, écrire l'équation scalaire traduisant le théorème du moment dynamique, au point A, pour le mouvement de **(S4)** par rapport à **(S1)**. Déduire l'expression qui permet de déterminer la valeur de la composante normale N_I.

C-1-2-8 Faire le bilan et écrire les torseurs des actions mécaniques extérieures agissant sur le système Σ composé par les solides **{(S2), (S3), (S4), Ressort 9}**.

C-1-2-9 Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures appliquées sur le système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

C-1-2-10 Déterminer la puissance développée par les actions mutuelles entre les solides du système **Σ.**

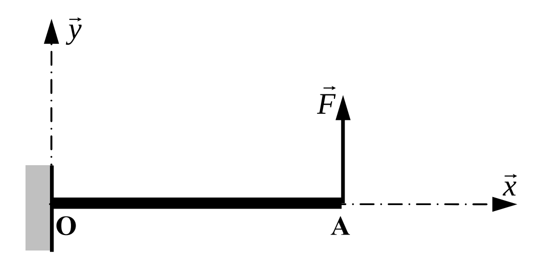
C-1-2-11 Ecrire l'équation scalaire traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système **Σ** au cours de son mouvement par rapport au repère $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

C-1-2-12 Déduire de ce qui précède, l'équation différentielle qui régit la fonction φ(t).

C-1-2-13 Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $\ddot{\varphi}+C\dot{\varphi}^2+D=0$ dans laquelle les termes ***C*** et ***D*** sont des constantes à déterminer.

C-2. Résistance des matériaux

On se propose d'étudier la déformation de la dent d'une roue dentée. Cette dent est modélisée par une poutre droite encastrée libre soumise à une force concentrée comme l'indique la figure suivante :



On désigne par :

R_{pe} : Résistance pratique à la contrainte normale ;

E : Module d'élasticité longitudinale ;

$OA = 2{,}25\,m_n$: Longueur de la poutre

$\dfrac{I_{Gz}}{y}=\dfrac{\pi^2}{24}k\ m_n^3$ Module de rigidité en flexion.

Où m_n est le module de la denture et *k* est une constante telle que $6 \le k \le 10$.

C-2-1 Définir et déterminer les composantes du torseur de cohésion tout au long de la ligne moyenne (**OA**).

C-2-2 Tracer le diagramme du moment de flexion.

C-2-3 En déduire l'expression de la contrainte normale en fonction du moment de flexion dans la section droite la plus sollicitée.

C-2-4 En appliquant la condition de résistance à la contrainte normale produite par la flexion, établir l'expression permettant de calculer le module m_n.

C-2-5 Donner l'équation différentielle de la déformée statique créée par la force $\vec{F}$.

C-2-6 En appliquant les conditions aux limites, déterminer alors l'expression permettant de calculer la flèche au point **A.**

ETUDE D'UNE PONCEUSE A VIBRATIONS ROTATIVES

On se propose de faire l'étude d'une ponceuse (figure 1) utilisée pour le travail de finition des surfaces des pièces en bois.

Tous les repères introduits ont une base orthonormée directe. Le système est constitué des solides suivants :

- **Bâti (S_0)** auquel est associé le repère galiléen $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. L'axe $(O,\vec{z}_0)$ est vertical ascendant.
- **(S_1)** en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_0)$ avec (S_0). Le repère lié à (S_1) est $R_1(O,\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ tel que $(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)=\theta(t)$.

  On désigne par ***m_1*** la masse de (S_1) et par $\left[I_O(S_1)\right]=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)}$ sa matrice d'inertie au point O dans une base orthonormée directe $(\vec{x}_0,-,-)$.
- **(S_2)** en liaison pivot glissant d'axe $(B,\vec{x}_0)$ avec (S_1). On note par A le point de l'axe $(O,\vec{x}_0)$ de manière que $\overrightarrow{AB}=R\,\vec{z}_1$ (R est une constante positive) et $\overrightarrow{OA}=\mu(t)\,\vec{x}_0$. Le repère lié à ($S_2$) est $R_2(B,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. La masse de ($S_2$) **est supposée négligeable**.
- **(S_3)** en liaison pivot glissant d'axe $(D,\vec{z}_0)$ avec (S_2) d'une part et en liaison pivot d'axe $(C,\vec{z}_0)$ avec (S_0) d'autre part. Le point **C** est choisi de manière que l'axe $(C,\vec{z}_0)$ passe par le centre d'inertie **G** de (S_3). Le repère lié à (S_3) est $R_3(C,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$ tel que $(\vec{x}_0,\vec{x}_3)=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)=\psi(t)$. On pose $\overrightarrow{DB}=\lambda(t)\,\vec{z}_0$; $\overrightarrow{OC}=L\,\vec{x}_0$; $\overrightarrow{DG}=a\,\vec{x}_3$ et $\overrightarrow{GC}=b\,\vec{z}_0$. (***a, b et L*** sont des constantes positives).

  On désigne par ***m_3*** la masse de (S_3) et par $\left[I_G(S_3)\right]=\begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)}$ sa matrice d'inertie au point G exprimée dans la base est définie par $(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$.

Le solide (S_1) est entraînée en rotation par rapport au bâti (S_0) par un moteur *M* (non représenté) en lui exerçant un torseur couple $\left\{\tau_{M\to S_1}\right\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ C_m\,\vec{x}_0\end{matrix}\right\}$.

L'action mécanique de la pièce à poncer (essuyer sa surface) sur (S_3) est supposée connue et est modélisée au point G par le torseur $\left\{\tau_{Pièce\to S_3}\right\}=\left\{\begin{matrix}F_x & C_x\\ F_y & C_y\\ F_z & C_z\end{matrix}\right\}_{(G,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)}$

Le champ de pesanteur est représenté par le vecteur $\vec{g}=-g\,\vec{z}_0$; g est une constante.

On note par $\left\{ \mathcal{T}_{S_i \to S_j} \right\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(A_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)}$ le torseur d'action mécanique d'un solide (S_i) sur un solide (S_j) au centre géométrique de la liaison A_k, exprimé dans une base locale $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ de la liaison.

Toutes les liaisons sont considérées sans frottement (liaisons parfaites).

Travail demandé

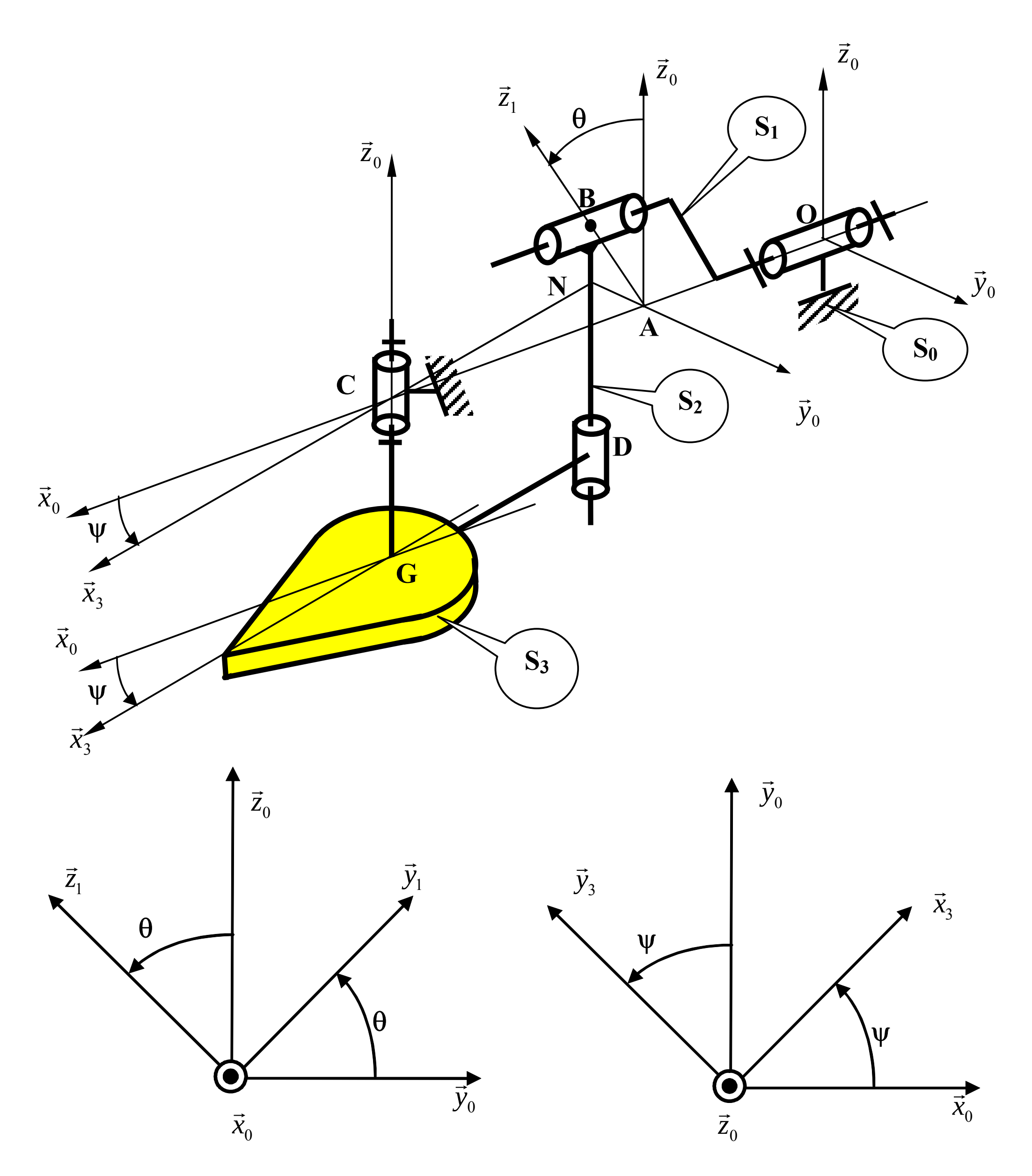
Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) au point B : $\left\{ \mathcal{V}(S_1/S_0) \right\}_B$.
2) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_0) au point B : $\left\{ \mathcal{V}(S_2/S_0) \right\}_B$. En déduire le vecteur vitesse au point D : $\vec{V}(D \in S_2/S_0)$.
3) Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0) au point G : $\left\{ \mathcal{V}(S_3/S_0) \right\}_G$. En déduire le vecteur vitesse au point D : $\vec{V}(D \in S_3/S_0)$.
4) Déterminer par deux manières différentes le vecteur vitesse au point D : $\vec{V}(D \in S_2/S_3)$. En déduire alors trois équations scalaires reliant les paramètres du mouvement $\{\theta, \psi, \lambda, \mu\}$ et leurs dérivées par rapport au temps.
5) En exprimant la fermeture géométrique de la chaîne $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_0\}$ et par projection sur la base du repère R_0, retrouver les trois équations scalaires précédemment déterminées dans de la question 4.

Partie II : Etude dynamique et énergétique

Dans la suite du problème, on désigne par Σ le système mécanique formé par les trois solides (S_1), (S_2) et (S_3) : $\Sigma = \{S_1, S_2, S_3\}$.

1) Déterminer le torseur cinétique au point O de (S_1) au cours de son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
2) Déterminer le torseur cinétique au point G de (S_3) au cours de son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
3) Déterminer l'énergie cinétique du système Σ au cours de son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
4) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système Σ .
5) Déterminer la puissance développée par les efforts extérieurs appliquées sur le système Σ au cours de sont mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
6) Par application du théorème de l'énergie cinétique au système Σ dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, déduire une expression permettant de calculer la valeur du couple C_m, exercé par le moteur *M* sur (S_1), en fonction des paramètres de mouvement et des composantes du torseur de l'action mécanique exercée par la pièce sur (S_3).



z0
z1
θ
S1
z0
B
O
N
A
y0
S0
C
S2
y0
D
x0
ψ
x3
G
x0
S3
ψ
x3
z0
z1
y1
θ
θ
y0
x0
y0
y3
x3
ψ
ψ
x0
z0

Figure 1

ETUDE D'UNE POMPE AXIALE

Le schéma cinématique de la figure (1) est un mécanisme de transformation de mouvement de rotation continue en un mouvement de translation alternatif.

Le système est constitué par les solides suivants :

- **Un bâti (S_0).**
- **Un arbre d'entrée (S_1)** en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti, est entraîné par un moteur (non représenté) à une vitesse de rotation constante ω.
- **Une manivelle (S_2)** est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{u})$ avec (S_1) d'une part et en liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{y}_2)$ avec **un solide (S_3)** d'autre part.
- **Un coulisseau (S_4)** en liaison rotule de centre B avec **(S_3)** d'une part et en liaison glissière d'axe $(C, \vec{x}_0)$ avec le bâti **(S_0)** d'autre part.

Repères et paramètres de position

On considère les repères orthonormés directs suivants :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère galiléen lié au bâti **(S_0)**.
- $R_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié à l'arbre (**S_1**). On pose $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ avec $\dot{\psi} = \omega = cte > 0$
- $R_1^*(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ deuxième repère lié à l'arbre (**S_1**). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_1, \vec{v})$ avec $\alpha = cte > 0$
- $R_2(A, \vec{u}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié à la manivelle (**S_2**). On pose $\theta = (\vec{v}, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.
- $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$ repère lié au solide (**S_3**). On pose $\varphi = (\vec{u}, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.
- $R_4(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié au coulisseau **(S_4)**.

Les positions des centres géométriques des liaisons sont définies par les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_0$; $\overrightarrow{OC} = b\,\vec{x}_0 + c\,\vec{y}_0$; $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\vec{y}_2$; $\overrightarrow{BC} = \delta\,\vec{x}_0$ avec : λ et δ sont des paramètres variables de position tandis que **a, b** et **c** sont des constantes positives.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Déterminer, dans la base du repère $R_1^*(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$, les torseurs cinématiques suivants :

   De (S_1) dans son mouvement par rapport à (S_0) au point O : $\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_O$.

   De (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) au point A : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_A$.

   De (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_0) au point A : $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_A$.

2) Exprimer, dans la base du repère $R_1^*(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$, la vitesse de rotation du solide (S_3) par rapport au bâti (S_0).
3) Calculer la vitesse du point B par rapport au bâti (S) de deux manières différentes :
   a) En passant par le point A.
   b) En passant part le point C.
4) Donner alors la loi entrée-sortie des vitesses du mécanismes (relation ω et δ).

Partie II : Géométrie des masses

L'arbre d'entrée (S_1) est considéré obtenu par un assemblage des éléments homogènes suivants (figure 2) :

- Tige T_1, de longueur (I_1 , I_2) = L_1 et de masse m_1 et d'axe $(I_1, \vec{x}_0)$.
- Disque D d'épaisseur négligeable de centre E, de rayon R, de masse m et d'axe $(E, \vec{u})$.
- Tige T_2, de longueur (I_3 , I_4) = L_2 et de masse m_2 et d'axe $(I_3, \vec{u})$.
- Tige T_3, de longueur (I_4 , I_5) = L_3 et de masse m_3 et d'axe $(I_4, \vec{x}_0)$.

Le disque D est soudé aux deux extrémités I_2 et I_3 des deux tiges T_1 et T_2 de manière que $\overrightarrow{EI_2} = -R\,\vec{v}$ et $\overrightarrow{EI_3} = R\,\vec{v}$.

La tige T_3 est soudée en I_4 à la tige T_2.

On note respectivement par A_1, A_2 et A_3 les centres d'inertie des trois tiges T_1, T_2 et T_3

Questions

1) Montrer que la matrice d'inertie de l'arbre d'entrée (1) au point I_2 exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est de la forme $\left[I_{I_2}(S_1)\right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

2) Donner dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la matrice d'inertie de la tige T_1 au point I_2 : $\left[I_{I_2}(T_1)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

3) Donner dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la matrice d'inertie de la tige T_3 au point A_3 : $\left[I_{A_3}(T_3)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$. Déduire alors cette matrice au point I_2 dans la même base : $\left[I_{I_2}(T_3)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

4) Donner dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ la matrice d'inertie de la tige T_2 au point A_2 : $\left[I_{A_2}(T_2)\right]_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)}$. Déduire alors cette matrice au même point A_2 dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\left[I_{A_2}(T_2)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

5) Déduire de la question 4 la matrice d'inertie de la tige T_2 au point I_2 exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\left[I_{I_2}(T_2)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

6) Donner dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ la matrice d'inertie du disque D au point E : $\left[I_E(D)\right]_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)}$. Déduire alors cette matrice au même point E dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\left[I_C(D)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

7) Déduire de la question 6 la matrice d'inertie du disque D au point I_2 exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\left[I_{I_2}(D)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

8) Calculer alors la matrice d'inertie de l'arbre d'entrée (1) au point I_2 exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ $\left[I_{I_2}(S_1)\right]_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$.

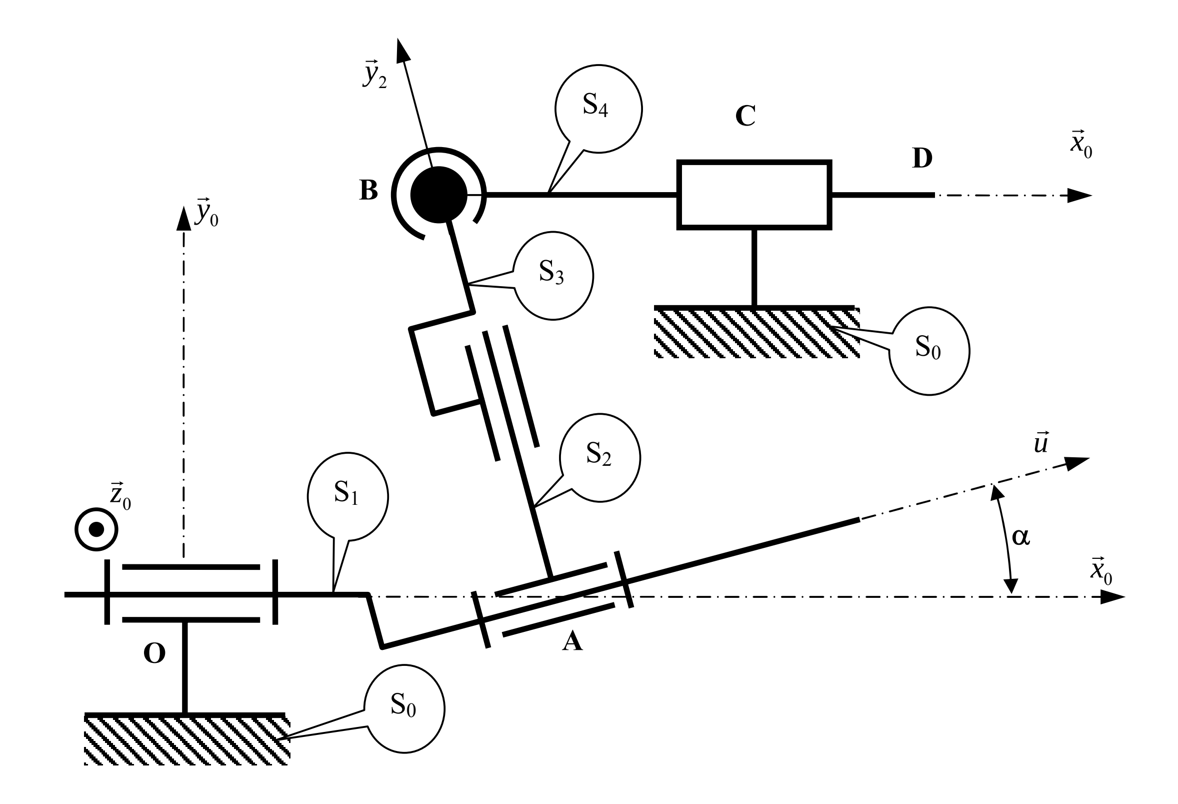
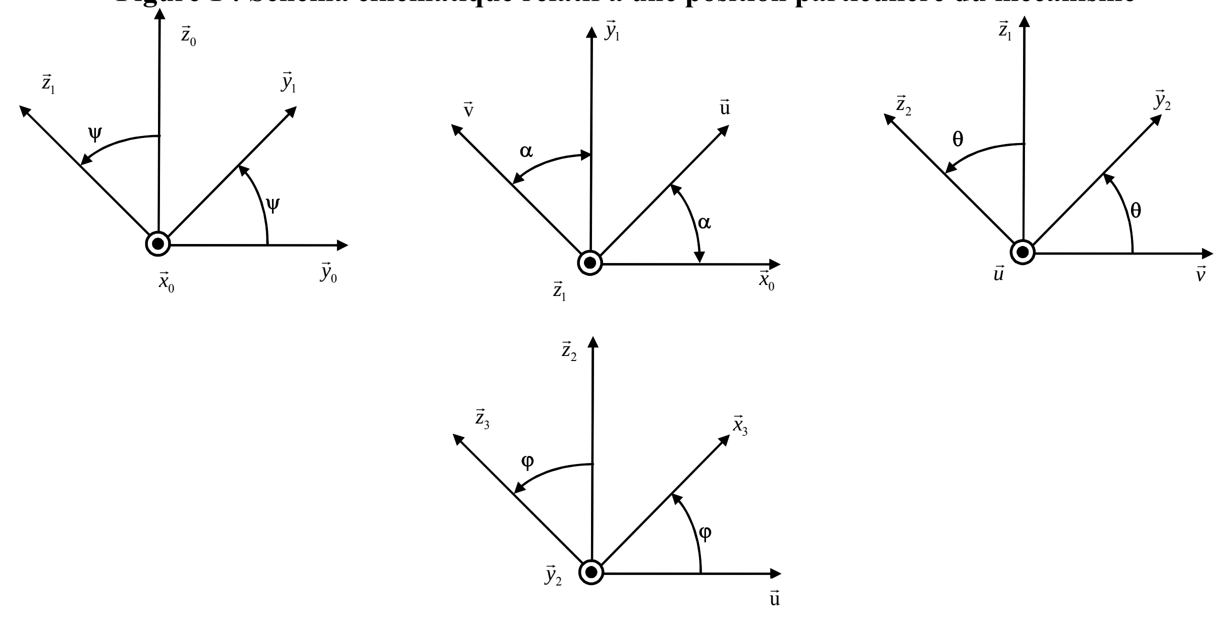


Figure 1 : Schéma cinématique relatif à une position particulière du mécanisme



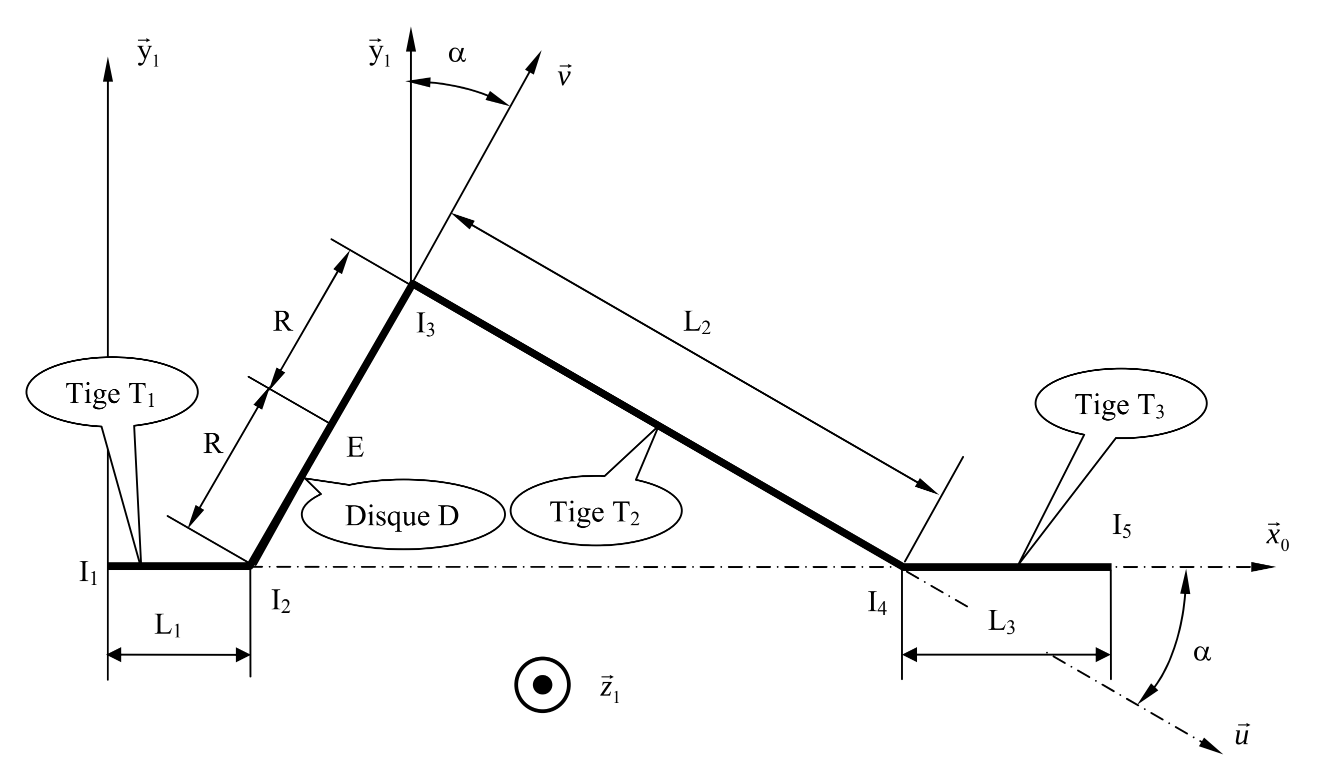


Figure 2 : Modélisation de l'arbre d'entrée (S_1)

ETUDE D'UN MECANISME A DEUX ROUES

Le schéma de la figure 1 représente un mécanisme à deux roues. Il est constitué essentiellement, de trois solides :

- (S_0) : bâti fixe. On pose $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère lié à (S_0)
- (S_1) : axe entraîné en rotation par rapport à (S_0) par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$. On pose $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ repère lié à (S_1).
- (S_2) et (S'_2) : deux roues en liaison pivot avec (S_1) d'axe $(O_1,\vec{y}_1)$. (S_2) et (S'_2) sont constamment en contact linéique rectiligne avec le bâti (S_0). On pose $R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)$ repère lié à (S_2).

Paramètres de position et données géométriques des solides :

- Le mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) est décrit par le paramètre $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est décrit par l'angle $\varphi = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_0,\vec{z}_2)$.
- Les données géométriques sont : $\left\|\overrightarrow{OO_1}\right\| = cte$; $\left\|\overrightarrow{O_1C}\right\| = \left\|\overrightarrow{O_1C'}\right\| = R_1$; $\left\|\overrightarrow{CI}\right\| = R$ (rayon des roues)

$\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \left\|\overrightarrow{IB}\right\| = L$.

Travail demandé

Etude cinématique

1) Ecrire les torseurs cinématique des mouvements des solides :

1-a) (S_1) par rapport à **(S_0)** au point O_1,

1-b) (S_2) par rapport à **(S_1)** au point C,

1-c) (S_2) par rapport à **(S_0)** au point C,

2) En déduire le torseur cinématique du mouvement de **(S'_2)** par rapport à **(S_0)** au point **C'**.

3) Calculer :

2-a) la vitesse du point géométrique de contact I en mouvement par rapport à **(S_0)** : $\vec{V}(I/S_0)$

2-b) la vitesse de glissement en I de **(S_2)** par rapport à **(S_0)** : $\vec{V}(I \in S_2/S_0)$.

4) Déterminer la relation entre les vitesses angulaires $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ pour qu'il y ait roulement sans glissement au point I.

5) Soit M un point de la ligne de contact entre **(S_2)** et **(S_0)** tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\,\vec{y}_1$. Calculer $\vec{V}(M \in S_2/S_0)$ en utilisant la condition de roulement sans glissement au point I.

6) Déduire du résultat de la question 5, les vecteurs vitesses des points A et B.

7) Représenter dans le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ la distribution des vitesses de **(S_2)** par rapport à **(S_0)** le long de la ligne de contact (AB)

8) Par symétrie, représenter la distribution des vitesses de **(S'_2)** par rapport à **(S_0)** le long de la ligne de contact (A'B').

Etude cinétique

Les roues **(S_2)** et **(S'_2)** sont identiques et assimilées à deux cylindres pleins homogènes, de rayon **R**, de longueur **2L** et de masse **m** chacune. Elles constituent ensemble un système noté **(Σ).**

On suppose qu'il y a roulement sans glissement des roues **(S_2)** et **(S'_2)** par rapport à **(S_0)** respectivement au point **I** et **I'**.

1) Déterminer, dans la base du repère **R_2**, la matrice d'inertie de **(S_2)** au point **C** : $\left[I_C(S_2)\right]_{(\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)}$.
2) Déterminer le torseur cinétique de **(S_2)**, dans son mouvement par rapport au repère **R_0**, au point **C** puis au point **O_1** (Origine du repère **R_1**).
3) En déduire le torseur cinétique de **(S'_2)**, dans son mouvement par rapport au repère **R_0**, au point **O_1**.
4) Déduire, à partir des questions **2** et **3**, le torseur cinétique du système **(Σ)**, dans son mouvement par rapport au repère **R_0**, au point **O_1**.
5) Déterminer le torseur dynamique du système **(Σ),** dans son mouvement par rapport au repère **R_0**, au point **O_1**.

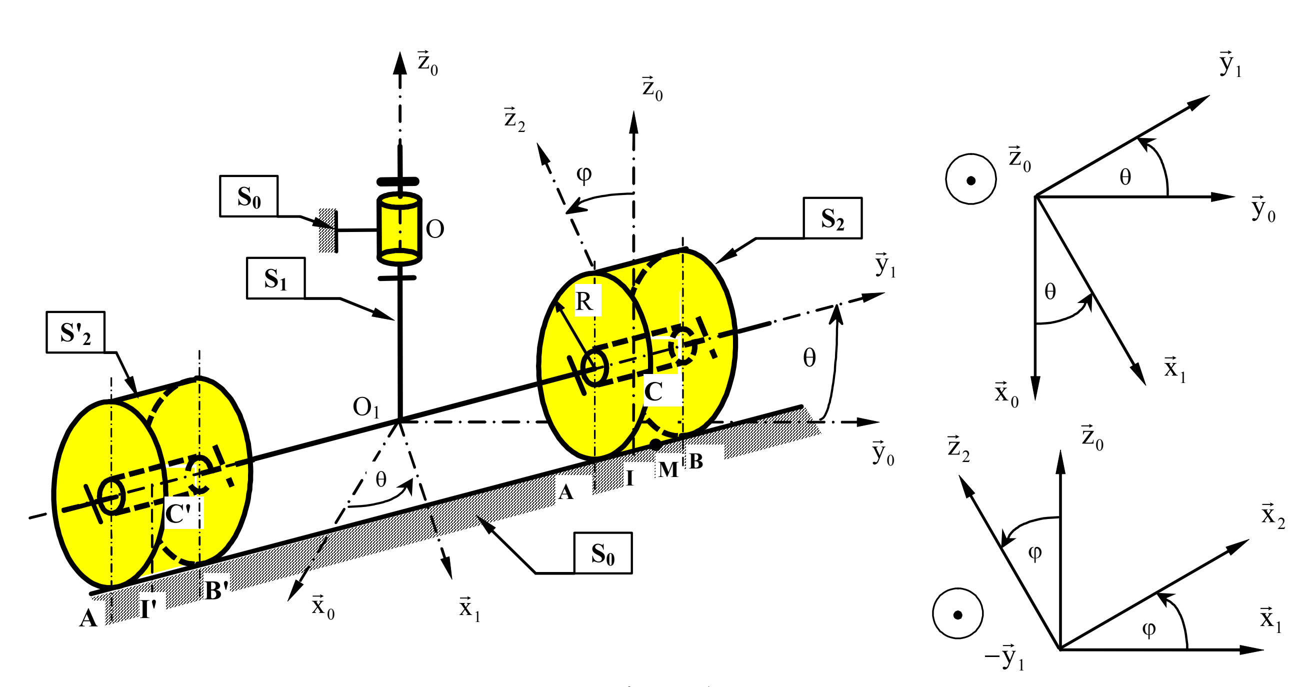


Figure 1

SYSTEME DE COMMANDE D'UN JOUET

La figure 1 représente un schéma cinématique composé d'un corps d'un jouet destiné pour les enfants (voiture, avion, etc.) et de son système de commande. L'ensemble du schéma est modélisé par les solides suivants:

- (S_1) représentant le corps du jouet. Il est en appui plan de normale $(O_1, \vec{z}_0)$ avec une surface parfaitement plane d'un sol (S_0).
- (S_2): un pignon arbré en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec le corps (S_1). L'arbre (S_2) est entraîné en rotation par un petit moteur électrique (M) lié au corps (S_1).
- (S_3): une chape en liaison pivot $(A, \vec{z}_0)$ avec (S_2) et en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x}_3)$ avec le solide (S_4).
- (S_4): un solide formé de:
    1) deux roues identiques de centre de masse C_1 et C_2, d'épaisseur négligeable et de rayon **R.** Ces deux roues sont en contact ponctuel en **I** et en **J** avec le plan du sol (S_0).
    2) d'une roue dentée conique de centre de masse B, de rayon primitif **r** et engrène avec le pignon arbré (S_2)
    3) d'une tige de longueur $\mathbf{C_1C_2=2L}$, de centre de masse A et d'axe $(A, \vec{x}_3)$.

Paramétrage du système

On considère les repères suivants:

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié à la surface plane du sol (S_0). L'axe $(O, \vec{z}_0)$ étant la normale ascendante au plan de (S_0).
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_1) tel que $\overrightarrow{OA} = x(t)\,\vec{x}_0 + y(t)\,\vec{y}_0 + R\,\vec{z}_0$ et $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_2) tel que $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.
- $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ un repère lié à (S_3) tel que $\gamma(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$.
- $R_4(A, \vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ un repère lié à (S_4) tel que $\varphi(t) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$.

On pose $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_e$ (ω_e = constante > 0), $\overrightarrow{AI} = L\,\vec{x}_3 - R\,\vec{z}_0$; $\overrightarrow{AJ} = -L\,\vec{x}_3 - R\,\vec{z}_0$

Travail demandé

Partie I: Etude cinématique

1) Déterminer, au point A, le torseur cinématique du mouvement du solide (S_1) par rapport au repère R_0 : $\left\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\right\}_A$.

2) Déterminer, au point A, le torseur cinématique du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) puis par rapport au repère R_0 : $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_A$ et $\left\{\mathcal{V}(S_2/R_0)\right\}_A$.

3) Déterminer, au point A, le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_1) puis par rapport au repère R_0 : $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\right\}_A$ et $\left\{\mathcal{V}(S_3/R_0)\right\}_A$.

4) Déterminer, au point A, le torseur cinématique du mouvement du solide (S_4) par rapport au solide (S_3) puis par rapport au repère R_0 : $\left\{\mathcal{V}(S_4/S_3)\right\}_A$ et $\left\{\mathcal{V}(S_4/R_0)\right\}_A$.

5) Déduire de la question 4, les vecteurs vitesses de glissement aux points I et J de (S_4) au cours de son mouvement par rapport au sol (S_0) : $\vec{V}(I \in S_4/R_0)$ et $\vec{V}(J \in S_4/R_0)$

6) Appliquer la condition de roulement sans glissement, aux points I et J, de (S_4) au cours de son mouvement par rapport au sol (S_0) et déduire de chaque condition les expressions des cordonnées ($\dot{x}$ et $\dot{y}$) du vecteur vitesse du point A par rapport à (S_0).

7) Déduire de la question 6, une relation entre les angles α et γ. Donner de nouveau les expressions des cordonnées ($\dot{x}$ et $\dot{y}$) du vecteur vitesse du point A par rapport à (S_0).

8) Dans le cas où le corps du jouet se trouve devant un obstacle ($\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$), Donner la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ et discuter les valeurs des vitesses de glissement aux points I et J en donnant votre conclusion.

Partie II : Géométrie des masses

On considère dans cette partie le solide (S_4) modélisé comme suit (figure 2):

- Les deux roues de centre de masse $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$, sont modélisées par deux disques $\mathbf{D_1}$ et $\mathbf{D_2}$ homogènes et identiques. Chaque disque a une épaisseur négligeable, une masse $\mathbf{m_1}$ et un rayon **R**.
- La roue dentée conique de centre de masse **B** est modélisée par un disque $\mathbf{D_3}$ homogène de rayon **r** et de masse $\mathbf{m_2}$. On pose $\overrightarrow{AB} = \frac{L}{2}\vec{x}_3$
- La tige **T** reliant les trois disques et d'axe $(A, \vec{x}_3)$, a une longueur $\mathbf{C_1C_2=2L}$, un centre de masse **A** et une masse $\mathbf{m_3}$.

Questions

1) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S_4) dans le repère $R_4(A, \vec{x}_3, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$.
2) Donner la matrice d'inertie du disque (D_1) au point C_1 puis au point A. (En précisant la base).
3) Déduire alors la matrice d'inertie du disque (D_3) au point A.
4) Donner la matrice d'inertie de la tige T au point A. (En précisant la base).
5) Calculer alors la matrice d'inerte de l'ensemble du solide (S_4) au point A: (En précisant la base).

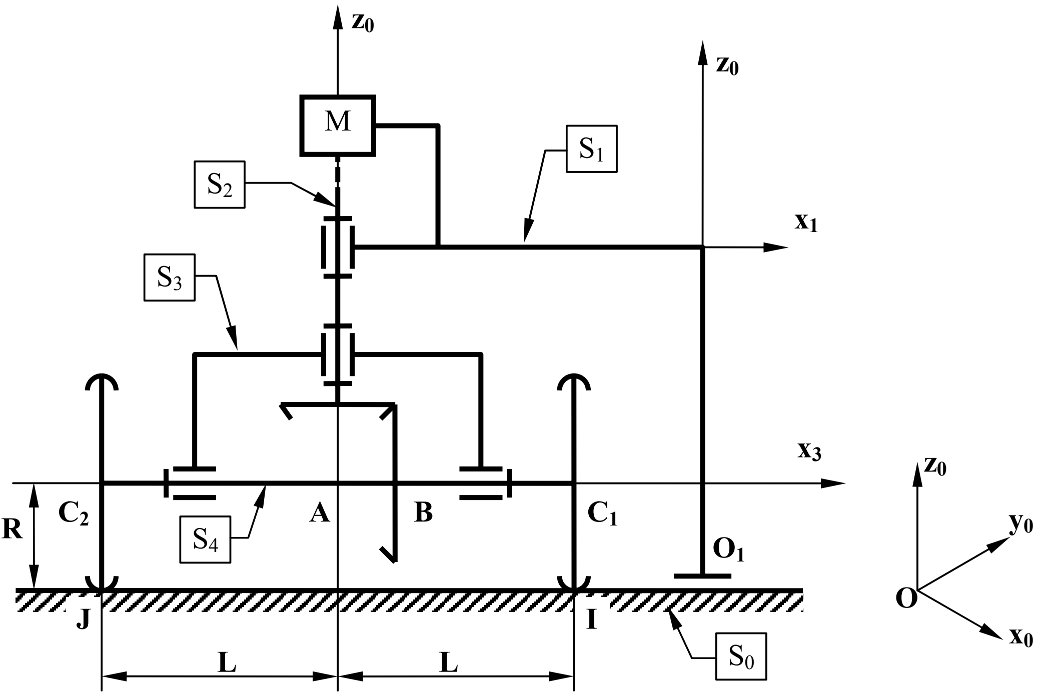


Figure 1. Schéma du système dans le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_0)$

Remarque: Pour faciliter la compréhension du schéma, le vecteur $\vec{x}_3$ est ramené dans le plan de la figure. L'orientation des différentes bases est donnée par les représentations planes ci-dessous.

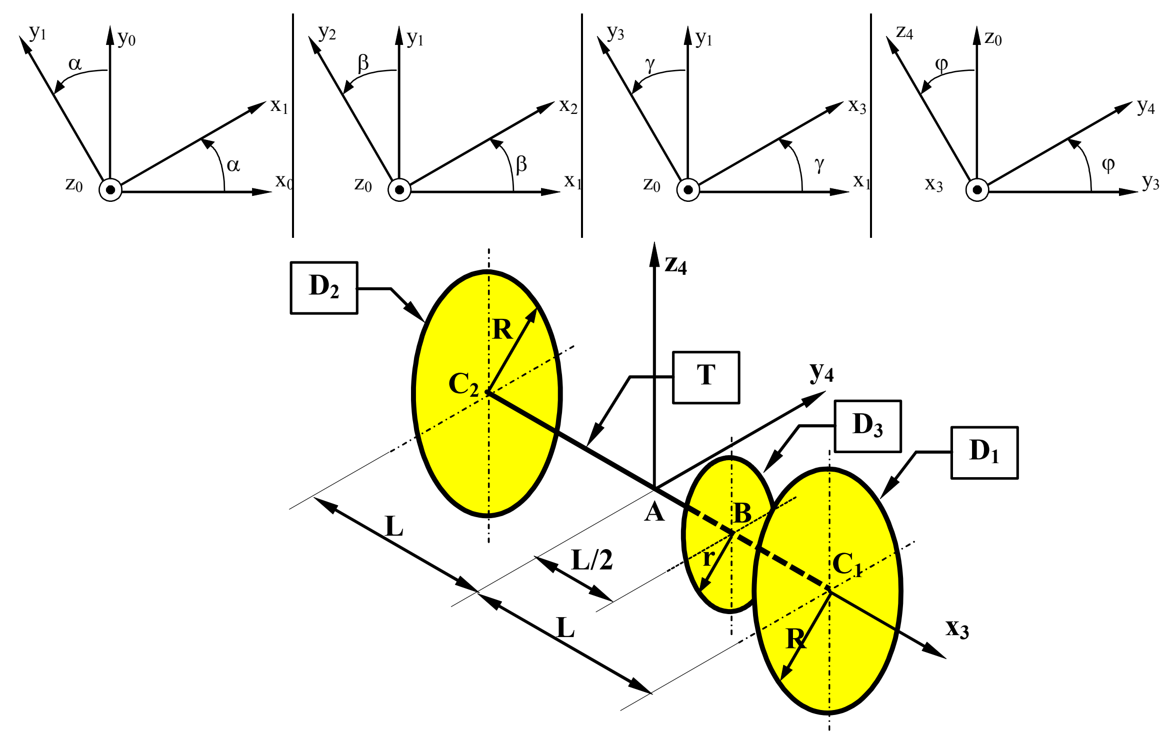


Figure 2. Modélisation du solide (S_4)

ETUDE DU MOUVEMENT D'UN SYSTEME PENDULAIRE

Présentation

Les figures 1 et 2 représentent de manière simplifiée un double système pendulaire. Il est constitué principalement des éléments suivants:

- un bâti (S_0),
- un ensemble (S_1) formé d'un cadre rectangulaire solidaire d'une boule sphérique (sphère pleine) et en liaison pivot par rapport à (S_0) autour d'un axe $(O,\vec{x})$.
- un ensemble (S_2) formé d'une tige solidaire de deux boules sphériques fixées en ses extrémités et en liaison pivot par rapport à (S_1) autour d'un axe $(O_2,\vec{x})$.

Repères et paramètres

On considère les repères et les paramètres suivants :

- $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ repère lié au bâti (S_o) tel que l'axe $(O,\vec{z})$ est vertical descendant.
- $R_1(O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ repère lié à l'ensemble (S_1) tel que le mouvement de rotation de (S_1) par rapport à (S_0) autour de l'axe $(O,\vec{x})$ est paramétré par l'angle $\alpha = (\vec{y},\vec{y}_1) = (\vec{z},\vec{z}_1)$.
- $R_2(O_2,\vec{x},\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ repère lié à l'ensemble (S_2) tel que $\overrightarrow{OO_2} = e\,\vec{z}_1$ (e = constante >0) et le mouvement de rotation de (S_2) par rapport à (S_1) autour de l'axe $(O_2,\vec{x})$ est paramétré par l'angle $\theta = (\vec{y}_1,\vec{y}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2)$.

Données

Tous les solides sont homogènes, leurs caractéristiques géométriques et d'inertie sont illustrées par le tableau suivant :

Données géométriques	Données d'inertie
Ensemble (S_1)	**Cadre** de masse $\mathbf{m_1}$, de longueur **2L** et de centre d'inertie confondu avec le point **O**. **Boule** de masse $\mathbf{3m_1}$ et de rayon $\mathbf{R_1}$. $\overrightarrow{OO_2} = e\,\vec{z}_1$ (e = constante >0)
Ensemble (S_2)	**Tige** de masse $\mathbf{m_2}$, de longueur **b** et de centre d'inertie confondu avec le point $\mathbf{O_2}$. **Petite boule** de même masse $\mathbf{m_2}$ que la tige et de rayon $\mathbf{r_2}$. **Grande boule** de masse $\mathbf{2m_2}$ et de rayon $\mathbf{R_2}$.

Travail demandé

Partie I : Calcul d'inertie

I-1) Déterminer, en fonction des données du problème, les positions des centres d'inertie :

- **a)** $\mathbf{G_1}$ de l'ensemble $(\mathbf{S_1})$. On posera $\overrightarrow{OG_1} = z_1\,\vec{z}_1$ et on explicitera, en fonction des données, la valeur de $\mathbf{z_1}$.
- **b)** $\mathbf{G_2}$ de l'ensemble $(\mathbf{S_2})$. On posera $\overrightarrow{O_2G_2} = z_2\,\vec{z}_2$ et on explicitera, en fonction des données, la valeur de $\mathbf{z_2}$.

I-2) Déterminer, en précisant les bases de projection, les matrices d'inertie des solides suivants:

- **a)** de la tige au point $\mathbf{O_2}$,
- **b)** de la grande boule de l'ensemble $(\mathbf{S_2})$ en son centre d'inertie.
- **c)** de l'ensemble $(\mathbf{S_2})$ au point $\mathbf{O_2}$. Vérifier que cette matrice est diagonale dans la base du repère $\mathbf{R_2}$. Expliciter alors ses composantes.

I-3) Donner, en précisant la base de projection, la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble $(\mathbf{S_1})$ au point **O**.

Partie II : Etude cinématique

II-1) Exprimer dans la base du repère $\mathbf{R_1}$, le torseur cinématique, au point **O**, caractérisant le mouvement de l'ensemble $(\mathbf{S_1})$ par rapport au bâti $(\mathbf{S_0})$.

II-2) Déduire alors la vitesse du centre d'inertie $\mathbf{G_1}$ de l'ensemble $(\mathbf{S_1})$ dans son mouvement par rapport au bâti $(\mathbf{S_0})$. On prend $\overrightarrow{OG_1} = z_1\,\vec{z}_1$.

II-3) Exprimer dans la base du repère $\mathbf{R_1}$, le torseur cinématique, au point $\mathbf{O_2}$, caractérisant le mouvement de l'ensemble $(\mathbf{S_2})$ par rapport au bâti $(\mathbf{S_0})$.

II-4) Déduire alors la vitesse du centre d'inertie $\mathbf{G_2}$ de l'ensemble $(\mathbf{S_2})$ dans son mouvement par rapport au bâti $(\mathbf{S_0})$. On prend $\overrightarrow{O_2G_2} = z_2\,\vec{z}_2$.

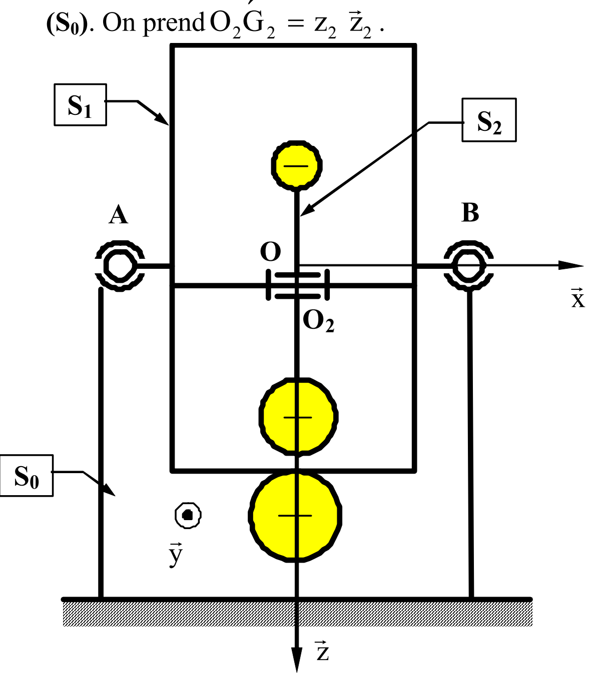
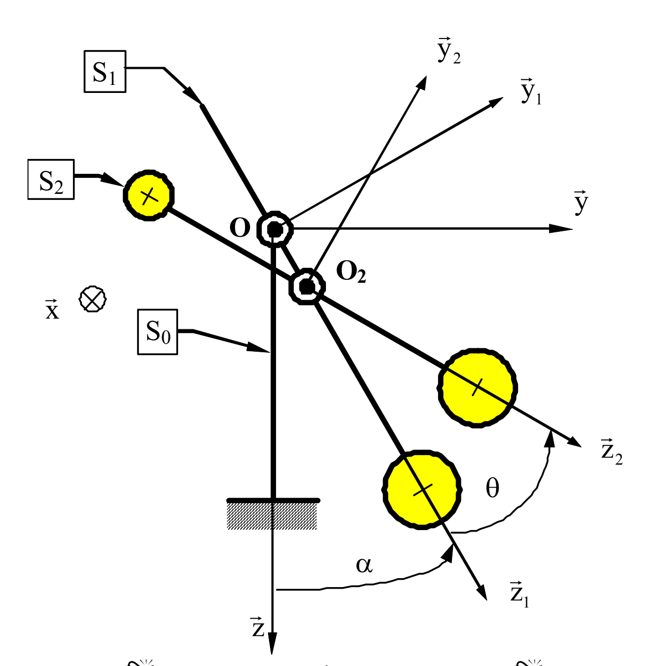


Figure 1 : Configuration géométrique du système à l'équilibre



- Le vecteur $\vec{x}$ est rentrant -

Figure 2 : Paramétrage du système

ETUDE CINEMATIQUE DU MOUVEMENT D'UN SYSTEME PENDULAIRE

Présentation

Figure 1

Un solide (S) composé d'un disque et de deux tourillons de rayon a. Le tourillon de (S) roule sans glisser au point A sur la portée cylindrique d'un bâti (Σ). Les deux portées cylindriques de (Σ) sont deux éléments de la surface du cylindre de révolution d'axe $(O,\vec{z}_0)$, de rayon R.

L'étude se ramène à celle d'un problème plan.

Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti Σ.

Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ le repère, tel que le point C et la point A soient sur l'axe $(O,\vec{x}_1)$; On pose $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$

$R\ (O,\vec{x}\ ,\vec{y}\ ,\vec{z}\ )$ un repère lié au solide (S). On pose $\varphi = (\vec{x}_1,\vec{x}\ )$.

Questions

I-1) Déterminer les vecteurs vitesses instantanés de rotation:

a) du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_1).

b) du repère (R_1) dans son mouvement par rapport à (R_0).

c) du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

I-2) Déterminer au point C le torseur cinématique, du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

I-3) Trouver une équation de liaison vérifiant la condition de roulement sans glissement entre le solide (S) et le bâti (Σ).

I-4) Calculer les vecteurs accélérations des points C et A du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0.

Géométrie des masses

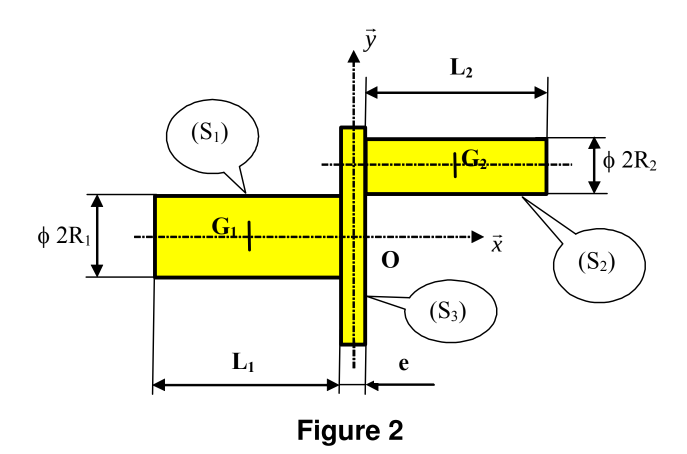


Figure 2

Un solide (S) est constitué par l'association de trois solides (S_1), (S_2) et (S_3) (figure2).

Le solide (S_1) est un cylindre homogène d'axe $(G_1, \vec{x})$, de centre d'inertie G_1, de longueur $\boldsymbol{L_1}$, de diamètre $\boldsymbol{2R_1}$ et de masse $\mathbf{m_1}$.

Le solide (S_2) est un cylindre homogène d'axe $(G_2, \vec{x})$, de centre d'inertie G_2, de longueur $\boldsymbol{L_2}$, de diamètre $\boldsymbol{2R_2}$ et de masse $\mathbf{m_2}$.

Le solide (S_3) est un disque homogène d'axe $(O, \vec{x})$, de centre d'inertie O, d'épaisseur ***e***, de diamètre $\boldsymbol{2R_3}$ et de masse $\mathbf{m_3}$.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère lié au solide (S).

On pose $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{2}(e + L_2)\,\vec{x} + a\,\vec{y}$; (***a*** est une constante positive).

Questions

II-1) Déterminer, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, au point G_1 la matrice d'inertie du cylindre (S_1). (Faire le calcul).

II-2) En déduire de la question (1) la matrice d'inertie du cylindre (S_2) au point G_2 et du disque (S_3) au point O dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

II-3) Déduire de la question (2) la matrice d'inertie du cylindre (S_2) au point O puis celle du cylindre (S_1) au point O.

II-4) Calculer alors la matrice d'inertie, au point O, de l'ensemble du solide (S).

ETUDE MECANIQUE D'UN ROBOT PORTIQUE

Lorsque son architecture est de type portique, un robot est constitué de deux chariots et d'une colonne sur laquelle est articulé un poignet orientable possédant un système de préhension. On a donc 3 directions de translation définies par la base orthonormée directe $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On utilisera la terminologie consacrée et on parlera « d'axe » en translation qu'on notera X, Y et Z (figure 1).

Le robot portique est destiné à la manutention dans les industries automobiles (chargement, déchargement de machines d'usinage notamment).

Le robot portique est principalement constitué :

- d'un **portique** (**S_0**) représentant le bâti,
- de **deux chariots (S_1)**, **(S_2) et d'une colonne (S_3)**,
- d'un **poignet** composé de trois unités de rotation **(S_4)**, **(S_5) et (S_6)**,
- de six **actionneurs**.

Les caractéristiques cinétiques données pour chaque solide tiennent compte des parties des actionneurs qui sont rigidement liées. Les caractéristiques cinétiques des autres composants mécaniques intervenant :

- dans la motorisation des différents solides **$(S_i)_{i=4,5,6}$** sont négligées,
- dans la motorisation des différents solides **$(S_i)_{i=1,2,3}$** ne sont pas concernées par cette partie de l'étude.

On note par :

- (**S_0**) le portique auquel est associé le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ avec $\vec{z}$ vertical descendant. On note $\vec{g} = g\,\vec{z}$ l'accélération de la pesanteur.
- Solide **(S_1),** chariot à déplacement longitudinal (« axe » X), auquel est associé le repère $R_1(O_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Le mouvement de **($S_1$)** par rapport à **($S_0$)** est une translation rectiligne, de direction $\vec{x}$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{10}$. La position de **(S_1)** par rapport à **(S_0)** est donnée par $\overrightarrow{OO_1}\cdot\vec{x} = x$. La masse de **($S_1$)** est notée **$m_1$**.
- Solide **(S_2)**, chariot à déplacement transversal (« axe » Y), auquel est associé le repère $R_2(O_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Le mouvement de **($S_2$)** par rapport à **($S_1$)** est une translation rectiligne, de direction $\vec{y}$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{21}$. La position de **(S_2)** par rapport à **(S_1)** est donnée par $\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\vec{y} = y$. La masse de **($S_2$)** est notée **$m_2$**.
- Solide **(S_3),** colonne à déplacement vertical (« axe » Z), auquel est associé le repère $R_3(O_3,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Le mouvement de **($S_3$)** par rapport à **($S_2$)** est une translation rectiligne, de direction $\vec{z}$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{23}$. La position de **(S_3)** par rapport à **(S_2)** est donnée par $\overrightarrow{O_2O_3}\cdot\vec{z} = z$. La masse de **($S_3$)** est notée **$m_3$**.
- Solide **(S_4)**, première unité de rotation du poignet, auquel est associé le repère $R_4(O_3,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z})$. Le mouvement de **($S_4$)** par rapport à **($S_3$)** est une rotation autour de l'axe $(O_3,\vec{z})$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{34}$ monté entre **(S_4)** et **(S_3)**. La position de **(S_4)** par rapport à **(S_3)** est donnée par le paramètre $\alpha = (\vec{x},\vec{x}_4) = (\vec{y},\vec{y}_4)$. La masse de **($S_4$)** est notée **$m_4$** et son centre d'inertie **G_4** est défini par $\overrightarrow{O_3G_4} = d\,\vec{z}$ avec d constante positive. Le moment d'inertie de **(S_4)** par rapport à l'axe $(O_3,\vec{z})$ est noté **I**.

- Solide **(S_5)**, deuxième unité de rotation du poignet, auquel est associé le repère $R_5(O_3, \vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$. Le mouvement de **($S_5$)** par rapport à **($S_4$)** est une rotation autour de l'axe $(O_3, \vec{x}_4)$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{45}$ monté entre **(S_5)** et **(S_4)**. La position de **(S_5)** par rapport à **(S_4)** est donnée par le paramètre $\beta = (\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}, \vec{z}_5)$. La masse de **($S_5$)** est notée **$m_5$** et son centre d'inertie **G_5** est défini par $\overrightarrow{O_3G_5} = h\,\vec{z}_5$ avec h constante positive. L'opérateur d'inertie en **O_3** de **(S_5)** est connu par la matrice associée à la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$: $\left[I_{O_3}(S_5)\right] = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$.
- Solide **(S_6)**, troisième unité de rotation du poignet et charge transportée par le robot portique, auquel est associé le repère $R_6(O_3, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_5)$. Le mouvement de **($S_6$)** par rapport à **($S_5$)** est une rotation autour de l'axe $(O_3, \vec{z}_5)$, commandée par un actionneur $\mathcal{M}_{56}$ monté entre **(S_6)** et **(S_5)**. La position de **(S_6)** par rapport à **(S_5)** est donnée par le paramètre $\gamma = (\vec{x}_4, \vec{x}_6) = (\vec{y}_5, \vec{y}_6)$. La masse de **($S_6$)** est notée **($m_6+\mu$)** avec **$m_6$** masse de l'unité du poignet et μ masse de la charge transportée. Le centre d'inertie **G_6** de **(S_6)** est défini par ses coordonnées (a, 0, c) dans le repère R_6. (a et c sont des constantes positives). L'opérateur d'inertie en **O_3** de **(S_6)** est connu par la matrice associée à la base $(\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_5)$: $\left[I_{O_3}(S_6)\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_5)}$.

Toutes les liaisons **$L_{i,i+1}$** entre les solides **(S_i)** et **(S_{i+1})** **(i = 0,..,5)** sont supposées parfaites.

Etude d'une phase de déchargement

On s'intéresse à une phase de déchargement (ou de chargement) pendant laquelle **x et y sont fixés, (constantes)** . Les paramètres z, α, β et γ sont les seuls variables.

Les actions mécaniques de l'actionneur $\mathcal{M}_{34}$ sur **(S_4)** {resp. $\mathcal{M}_{45}$ sur **(S_5)** et $\mathcal{M}_{56}$ sur **(S_6)**} sont modélisées par un couple de moment $\mathcal{C}_{34}\,\vec{z}$ (resp. $\mathcal{C}_{45}\,\vec{x}_4$ et $\mathcal{C}_{56}\,\vec{z}_5$). Le choix des actionneurs $\mathcal{M}_{34}$, $\mathcal{M}_{45}$ et $\mathcal{M}_{56}$ nécessite la connaissance de $\mathcal{C}_{34}$, $\mathcal{C}_{45}$ et $\mathcal{C}_{56}$.

Etude cinématique

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(O_3 / R_0)$.
2. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S$_4$)** par rapport à **R$_0$** au point **G$_4$**: $\left\{\mathcal{V}(S_4 / R_0)\right\}_{G_4}$. On exprime les composantes de $\vec{\Omega}(S_4 / R_0)$ relativement dans la base associée au repère **R$_4$** qu'on les note par $(\omega_{4x}, \omega_{4y}, \omega_{4z})$.
3. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S$_5$)** par rapport à **R$_0$** au point **G$_5$**: $\left\{\mathcal{V}(S_5 / R_0)\right\}_{G_5}$. On exprime les composantes de $\vec{\Omega}(S_5 / R_0)$ relativement dans la base associée au repère **R$_5$** qu'on les note par $(\omega_{5x}, \omega_{5y}, \omega_{5z})$.
4. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide **(S$_6$)** par rapport à **R$_0$** au point **G$_6$**: $\left\{\mathcal{V}(S_6 / R_0)\right\}_{G_6}$. On exprime les composantes de $\vec{\Omega}(S_6 / R_0)$ relativement dans la base associée au repère **R$_6$** qu'on les note par $(\omega_{6x}, \omega_{6y}, \omega_{6z})$.

Etude cinétique

Déterminez les grandeurs ou expressions suivantes :

1. $\vec{z} \cdot \vec{\sigma}_{O_3}(S_4 / R_0)$: moment cinétique par rapport à l'axe $(O_3, \vec{z})$ du solide **(S$_4$)** en mouvement par rapport à **R$_0$** en fonction des paramètres de position, de $\omega_{4x}, \omega_{4y}, \omega_{4z}$, des paramètres géométriques et des données massiques.
2. $\vec{\sigma}_{O_3}(S_5 / R_0)$: moment cinétique au point O_3 du solide **(S$_5$)** en mouvement par rapport à **R$_0$** en fonction des paramètres de position, de $\omega_{5x}, \omega_{5y}, \omega_{5z}$, des paramètres géométriques et des données massiques.
3. $\vec{\sigma}_{O_3}(S_6 / R_0)$: moment cinétique au point O_3 du solide **(S$_6$)** en mouvement par rapport à **R$_0$** en fonction des paramètres de position, de $\omega_{6x}, \omega_{6y}, \omega_{6z}$, des paramètres géométriques et des données massiques.

Etude dynamique

Notation : Les dérivées temporelles de $(\omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz})_{i=4,5,6}$ sont notées par $(\dot{\omega}_{ix}, \dot{\omega}_{iy}, \dot{\omega}_{iz})_{i=4,5,6}$

1. Faire le bilan et donner le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur le solide **(S$_6$)**.
2. En appliquant le théorème du moment dynamique par projection suivant l'axe $(O_3, \vec{z}_5)$, expliciter $\mathcal{C}_{56}$.
3. Faire le bilan et donner le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système $\Sigma_{56} = S_5 \cup S_6$.
4. En appliquant le théorème du moment dynamique par projection suivant l'axe $(O_3, \vec{x}_4)$, expliciter $\mathcal{C}_{45}$.
5. Faire le bilan et donner le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système $\Sigma_{456} = S_4 \cup S_5 \cup S_6$.
6. En appliquant le théorème du moment dynamique par projection suivant l'axe $(O_3, \vec{z})$, expliciter $\mathcal{C}_{34}$.

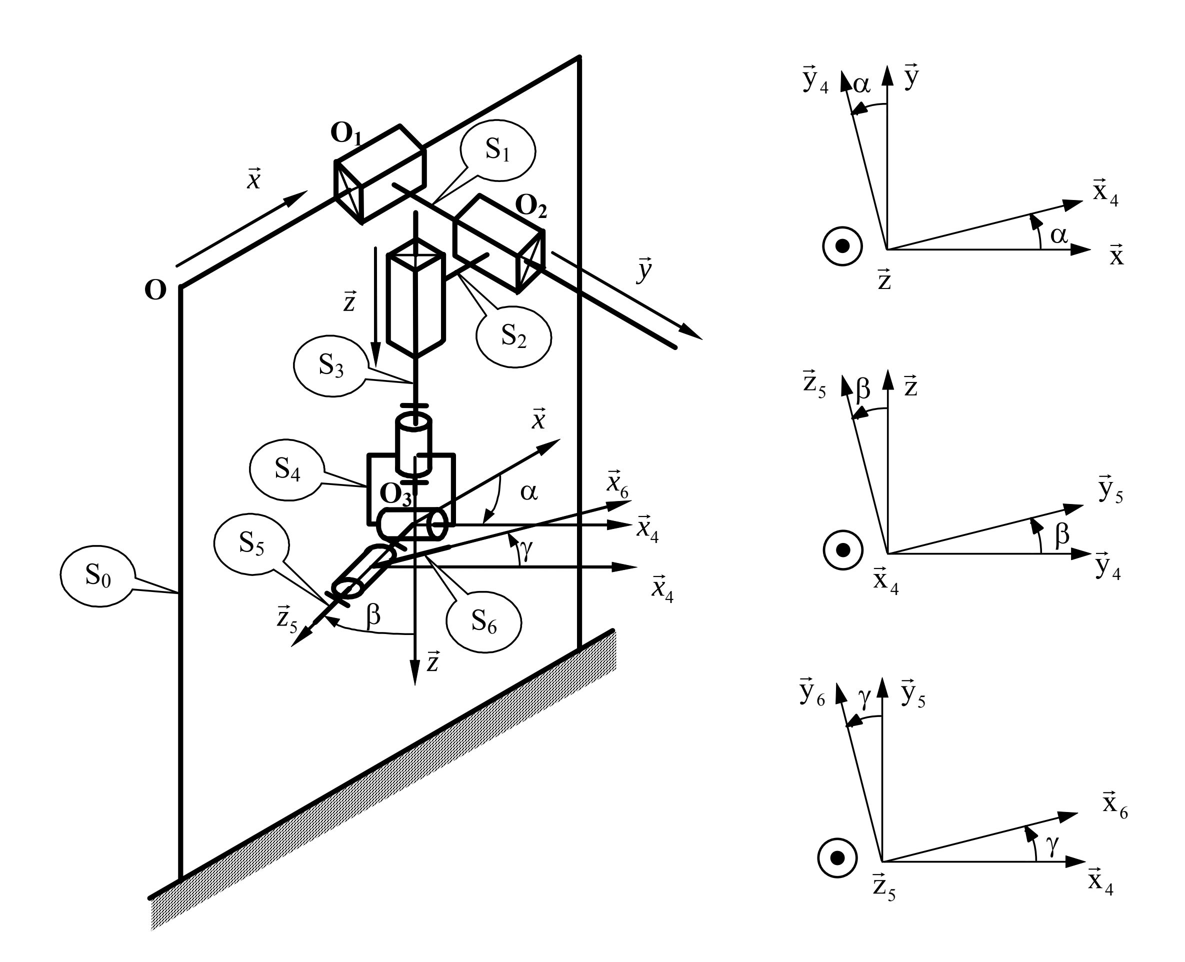


Figure 1 : Schéma cinématique du robot portique

ETUDE D'UNE PRESSE DE FORGEAGE

(EXTRAIT DU CONCOURS STI - MP-PC JUIN 2001)

La **figure 1** représente le dessin d'ensemble simplifié d'une presse de forgeage utilisée pour la déformation plastique des matériaux de certains types de pièces. Le schéma cinématique minimal de la presse est illustré par la **figure 2**.

Les principaux éléments de cette presse sont :

- le bâti **(0)**,
- l'arbre d'entrée **(1)** en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti,
- la bielle **(2)** en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_0)$ avec le bâti **(0)** et est reliée à l'arbre d'entrée **(1)** par l'intermédiaire du solide **(S)**,
- le solide (S) en liaison glissière avec la bielle **(2)** d'axe $(A,\vec{x}_2)$ et en liaison rotule de centre **P** avec l'arbre d'entrée **(1)**,
- le levier (4) en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z}_0)$ avec le bâti **(0)**,
- le coulisseau porte marteau (5) en liaison linéaire annulaire d'axe $(F,\vec{x}_4)$ avec le levier (4) et en liaison glissière d'axe $(F,\vec{y}_0)$ avec le bâti **(0)**.

Le levier **(4)** et la bielle **(2)** sont reliés entre eux par un élément élastique formé de deux ressorts identiques et du support de guidage **(3)**. Ce support est en liaison pivot d'axe $(D,\vec{z}_0)$ avec le levier **(4)**. Il est également en liaison linéaire annulaire d'axe $(E,\vec{y}_3)$ avec la bielle **(2)**.

Principe de fonctionnement

La rotation imposée à l'arbre **(1)** par le moteur **(M)**, non représenté, est transformée au moyen du solide (S) en mouvement d'oscillation de la bielle (2). Ce mouvement est transmis par l'intermédiaire de l'élément élastique (les deux ressorts + le support guidage (3)) au levier (4) et par la suite au coulisseau porte marteau (5) qui assure le forgeage de la pièce désirée.

Paramétrage du système (figure 2)

Les repères et les paramètres adoptés pour le mécanisme sont définis comme suit :

- $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est un repère lié au bâti **(0) supposé galiléen**.
- $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ est un repère lié à l'arbre d'entrée **(1)**. On pose $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$.
- $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ est un repère lié à la bielle **(2)**. On pose $\beta=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)$.
- $R_3(D,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$ est un repère lié au support de guidage **(3)**. On pose $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x}_3)=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)$.
- $R_4(B,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$ est un repère lié au levier (4), On pose $\gamma=(\vec{x}_0,\vec{x}_4)=(\vec{y}_0,\vec{y}_4)$.

Les positions des différents centres de liaison sont décrites par les relations vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{OA}=-a\ \vec{x}_0+b\ \vec{y}_0$; $\overrightarrow{BC}=c\ \vec{x}_0$; $\overrightarrow{OP}=r\ \vec{y}_1$; $\overrightarrow{AP}=(\lambda+L_2)\ \vec{x}_2$; $\overrightarrow{AE}=2L_2\ \vec{x}_2$

$\overrightarrow{ED}=(y+L_0)\ \vec{y}_3$; $\overrightarrow{BD}=L_4\ \vec{x}_4$; $\overrightarrow{BF}=(\mu+2L_4)\ \vec{x}_4$; $\overrightarrow{CF}=\eta\ \vec{y}_0$

Les angles **α, β,** θ **et** γ sont des paramètres de rotation du mécanisme. Quand aux paramètres de

translation il sont définis par : **y, λ, μ et η** où y est l'allongement de l'un des deux ressorts (les ressorts sont complètement relâchés à y = 0).

Les constantes géométriques du mécanisme sont : **a, b, c, L_0, L_2, L_4 et r**.

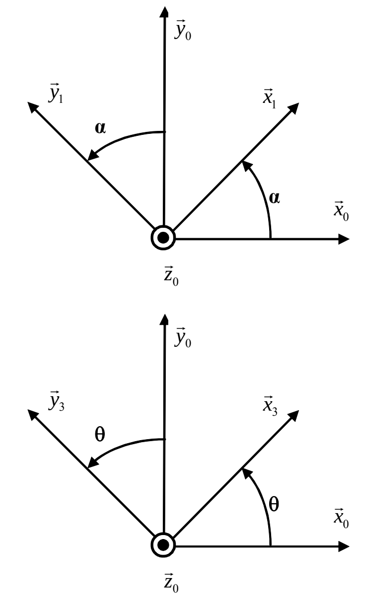
Caractéristiques d'inertie des éléments constitutifs du système

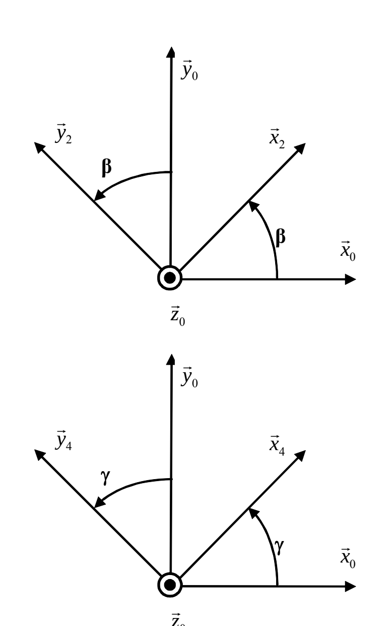
Les caractéristiques d'inertie des éléments constitutifs du système sont les suivantes :

- **Arbre d'entrée (1)**
  - Matrice d'inertie au point O exprimée dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est de la forme :

$$\left[I_O(S_1)\right] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)} .$$

  - Masse $\mathbf{M_1}$ et un centre d'inertie $\mathbf{G_1}$ tel que $\overrightarrow{OG_1} = y_1\ \vec{y}_1 + z_1\ \vec{z}_0$
- **Bielle (2)**
  - Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \vec{z}_0)$ égal à $\mathbf{I_2}$ et une masse $\mathbf{M_2}$,
  - Centre d'inertie $\mathbf{G_2}$ tel que $\overrightarrow{AG_2} = x_2\ \vec{x}_2$
- **Levier (4)**
  - Moment d'inertie par rapport à l'axe $(B, \vec{z}_0)$ égal à $\mathbf{I_4}$ et une masse $\mathbf{M_4}$
  - Centre d'inertie $\mathbf{G_4}$ confondu avec le point D,
- **Coulisseau porte marteau (5)**
  - Masse $\mathbf{M_5}$ et centre d'inertie $\mathbf{G_5}$,
- **Solide intermédiaire (S)**
  - Masse et inertie négligeables.





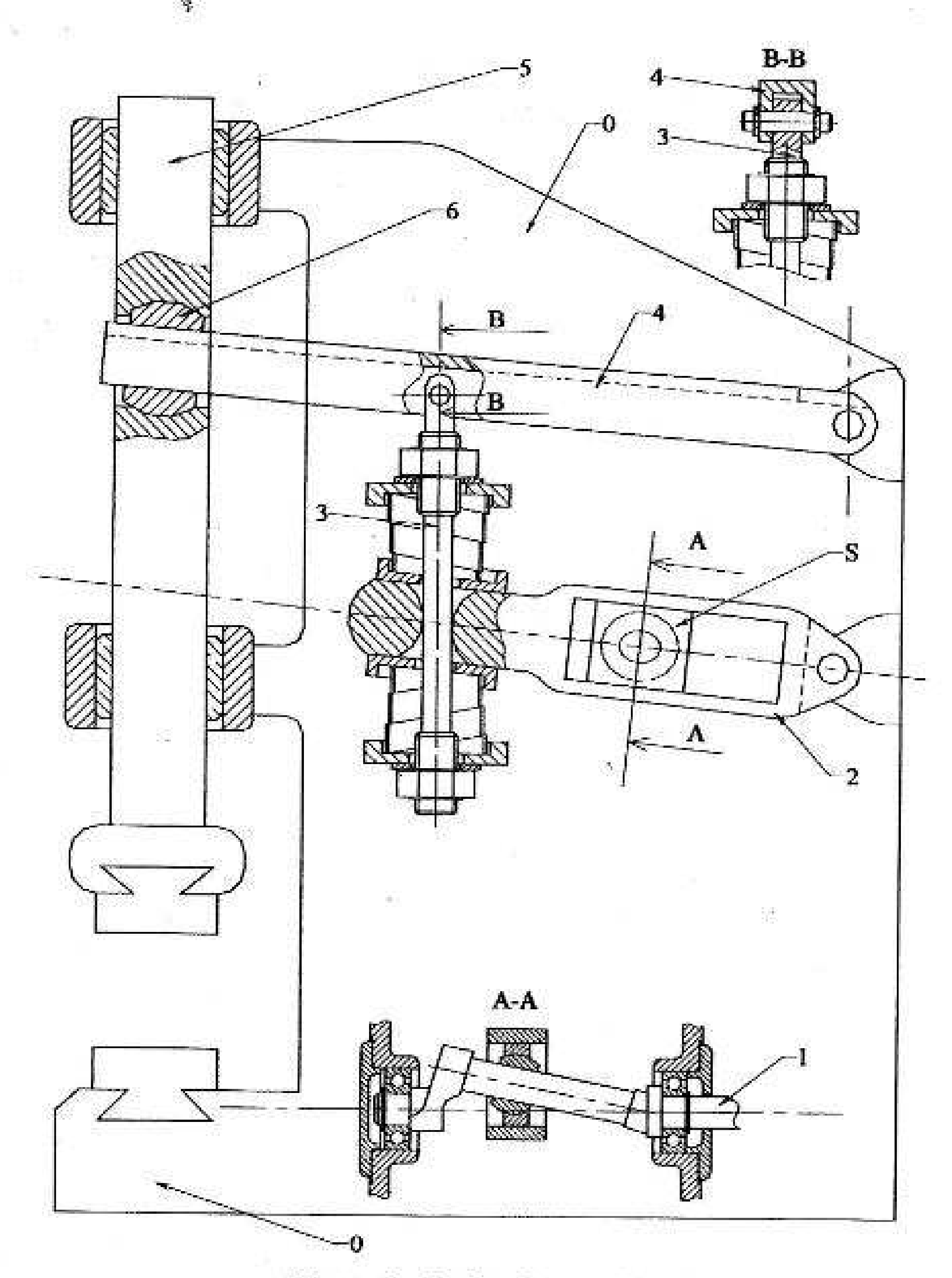


Figure 1 : dessin d'ensemble

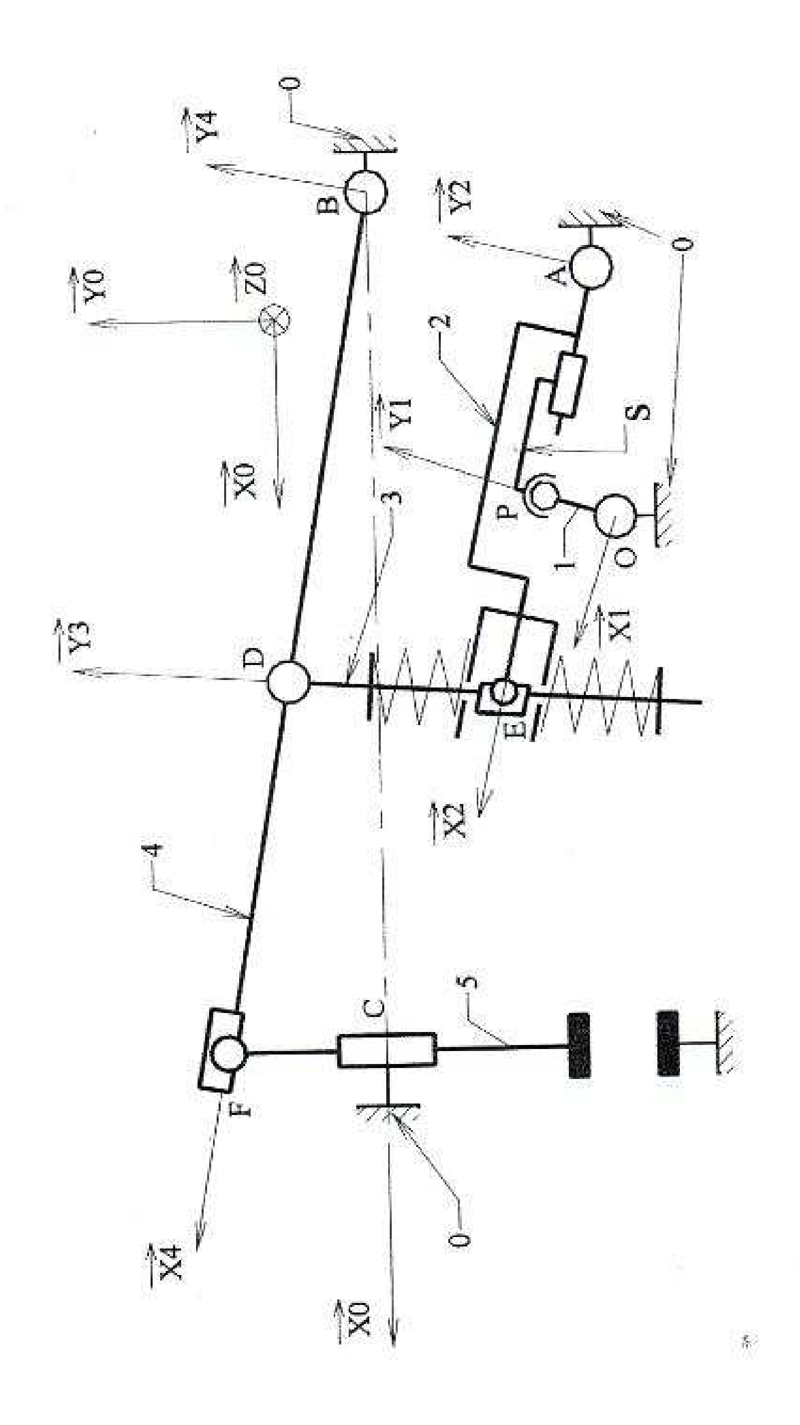


Figure 2 : schéma cinématique

Etude cinématique

1) Déterminer dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ le torseur cinématique du mouvement de l'arbre d'entrée (1) par rapport au bâti (0) au point P : $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0\right\}_P$.
2) Déterminer dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ le torseur cinématique du mouvement de la bielle (2) par rapport au bâti (0) aux points P et E : $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0\right\}_P$ et $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0\right\}_E$.
3) Déterminer dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ le torseur cinématique du mouvement du levier (4) par rapport au bâti (0) au point D : $\left\{\mathcal{V}(S_4/S_0\right\}_D$.
4) Déterminer dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ le torseur cinématique du mouvement du support de guidage (3) par rapport au bâti (0) au point E : $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0\right\}_D$. (On utilise $\vec{V}(D \in S_4/S_0)$ pour le calcul de $\vec{V}(E \in S_3/S_0)$)
5) Calculer les vecteurs accélérations suivants :
   a) $\vec{\Gamma}(G_4/R_0)$ l'exprimer dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$,
   b) $\vec{\Gamma}(G_5/R_0)$ l'exprimer dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,

Etude Energétique

On considère le sous ensemble **{E₁}** formé de l'arbre d'entrée (1), du solide intermédiaire (S) et de la bielle (2).

L'arbre d'entrée est entraînée en rotation par rapport au bâti (0) par un moteur *M* (non représenté) en lui exerçant un torseur couple $\left\{\tau_{M \rightarrow S_1}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{0} \\ \vec{C}_m = C_m\ \vec{z}_0\end{array}\right\}$.

L'action de rappel des deux ressorts sur la bielle (2) au point E est donnée par le torseur glisseur $\left\{\tau_{\mathrm{Ressorts} \rightarrow S_2}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2ky\ \vec{y}_3 \\ \vec{0}\end{array}\right\}_E$ où **k** est la raideur de l'un des ressorts.

L'action du support de guidage (3) sur la bielle (2) au point E est représentée par le torseur : $\left\{\tau_{S_3 \rightarrow S_2}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{F}_E = X_E\ \vec{x}_3 \\ \vec{m}_E = \vec{0}\end{array}\right\}_E$.

L'action de la pesanteur est $\vec{g} = -g\ \vec{y}_0$ *où g* est une constante positive.

Pour simplifier les calculs on admettra que toutes les liaisons sont parfaites.

Questions

1) Calculer relativement au repère galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ l'énergie cinétique de **{E₁} :** $E_C(E_1/R_0)$**.**
2) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur **{E₁}.**
3) Calculer la puissance de toutes les actions mécaniques extérieures et intérieures appliquées sur **{E₁}** dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
4) Ecrire la relation qui découle du théorème de l'énergie cinétique appliqué à **{E₁}** dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Etude Dynamique

L’action du bâti (0) sur le levier (4) au point B est représentée par le torseur :

$$\left\{\tau_{S_0 \to S_4}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}_B = X_B\ \vec{x}_0 + Y_B\ \vec{y}_0 + Z_B\ \vec{z}_0 \\ \vec{m}_B = L_B\ \vec{x}_0 + M_B\ \vec{y}_0 \end{matrix}\right\}_B$$

L’action de la pièce à forger sur le coulisseau porte marteau (5) est représentée par le torseur :

$$\left\{\tau_{Pièce \to S_5}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{F}_0 = F_0\ \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

Questions

1) L’élément élastique (support (3) + les deux ressorts) est supposé de masse et d’inertie négligeable.
   a) Ecrire les équations qui découlent du théorème de la résultante dynamique appliqué à l’élément élastique dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
   b) Ecrire les équations qu découlent du théorème du moment dynamique appliqué à l’élément élastique dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
   c) Déterminer en fonction de k et y, l’action en D du levier (4) sur l’élément élastique ainsi que le composante de la force X_E.
2) On considère le sous ensemble {**E2**} formé du levier (4) et du coulisseau porte marteau (5).
   a) Faire le bilan des torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées sur {**E2**}**.**
   b) Appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection dur $\vec{y}_0$ à {**E2**} dans son mouvement par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

ETUDE D'UN REDUCTEUR DE VITESSE

On considère le réducteur de vitesse schématisé par figure 1. Il est constitué :

- d'un bâti (S_0). On pose le repère $R_o(O,\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$ lié à (S_0),
- d'un plateau (S_1) lié à l'arbre d'entrée qui est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{y}_0)$ avec le bâti (S_0). On pose le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1)$ tel que le paramètre de mouvement de (S_1)/(S_0) est donné par l'angle $\psi_1=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$,
- d'un plateau conique (S_2), de demi angle au sommet δ, lié à l'arbre de sortie qui est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x}_o)$ avec le bâti (S_0). On pose le repère $R_2(O,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ tel que le paramètre de mouvement de (S_2)/(S_0) est donné par l'angle $\psi_2=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$,
- d'un galet sphérique (S_3), de **rayon R et de centre C**, en liaison pivot autour de $(C,\vec{u})$. Cet axe de liaison est d'une part coplanaire avec $(O,\vec{x}_o)$ et $(O,\vec{y}_0)$ et d'autre part fait un angle α **constant** avec $(O,\vec{x}_o)$. On pose le repère $R_3(C,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ lié à (S_3) tel que le paramètre de mouvement de (S_3)/(S_0) est φ. Dans ce cas : $\varphi=(\vec{v}_0,\vec{v})=(\vec{z}_0,\vec{w})$

Par ailleurs, le galet (S_3) est en contact **ponctuel sans glissement en I et J** avec respectivement les plateaux (S_1) et (S_2).

Les caractéristiques géométriques sont définies sur la figure 1.

Travail demandé

Partie I : Etude cinématique

1) Donner les torseurs cinématiques des mouvements de (S_1/S_0), de (S_2/S_0) et de (S_3/S_0) : $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_o)\right\}_{O_1}$, $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_o)\right\}_{O_2}$ et $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_o)\right\}_{C}$.
2) Exprimer les conditions de roulement sans glissement aux points I et J. En déduire le rapport des vitesses $\rho=\dfrac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1}$.
3) Calculer dans le mouvement par rapport à (S_1) :
   a) l'accélération du point I lié à (S_3) : $\vec{\Gamma}(I\in S_3/S_1)$,
   b) l'accélération du point géométrique I : $\vec{\Gamma}(I/S_1)$.

Partie II : Géométrie des Masses

On se propose de déterminer le centre d'inertie G_2 du plateau conique (S_2) seul (sans l'arbre de sortie).

Le plateau (S_2), supposé homogène et d'épaisseur négligeable, est composé de deux surfaces :

- une surface latérale, notée (S_{21}) de centre d'inertie G_{21},
- un disque formant la base du plateau, notée (S_{22}) de centre d'inertie G_{22}.

Soit $R(D,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un deuxième repère lié à (S_2) de manière que le point D coïncide avec le centre d'inertie G_{22} du disque (S_{22}). (Voir figure 2).

Les caractéristiques géométriques de (S_2) sont définies sur la figure 2.

Questions

1) En appliquant le premier théorème de GULDIN, calculer, en fonction de **r, H et δ**, l'aire de la surface latérale (S_{21}).

2) Déterminer dans le repère $R(D,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ la position du centre d'inertie $\mathbf{G_{21}}$ de la surface conique (S_{21}).

3) Déterminer alors dans le repère $R(D,\vec{x}_0,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ la position du centre d'inertie G_2 de tout le solide (S_2).

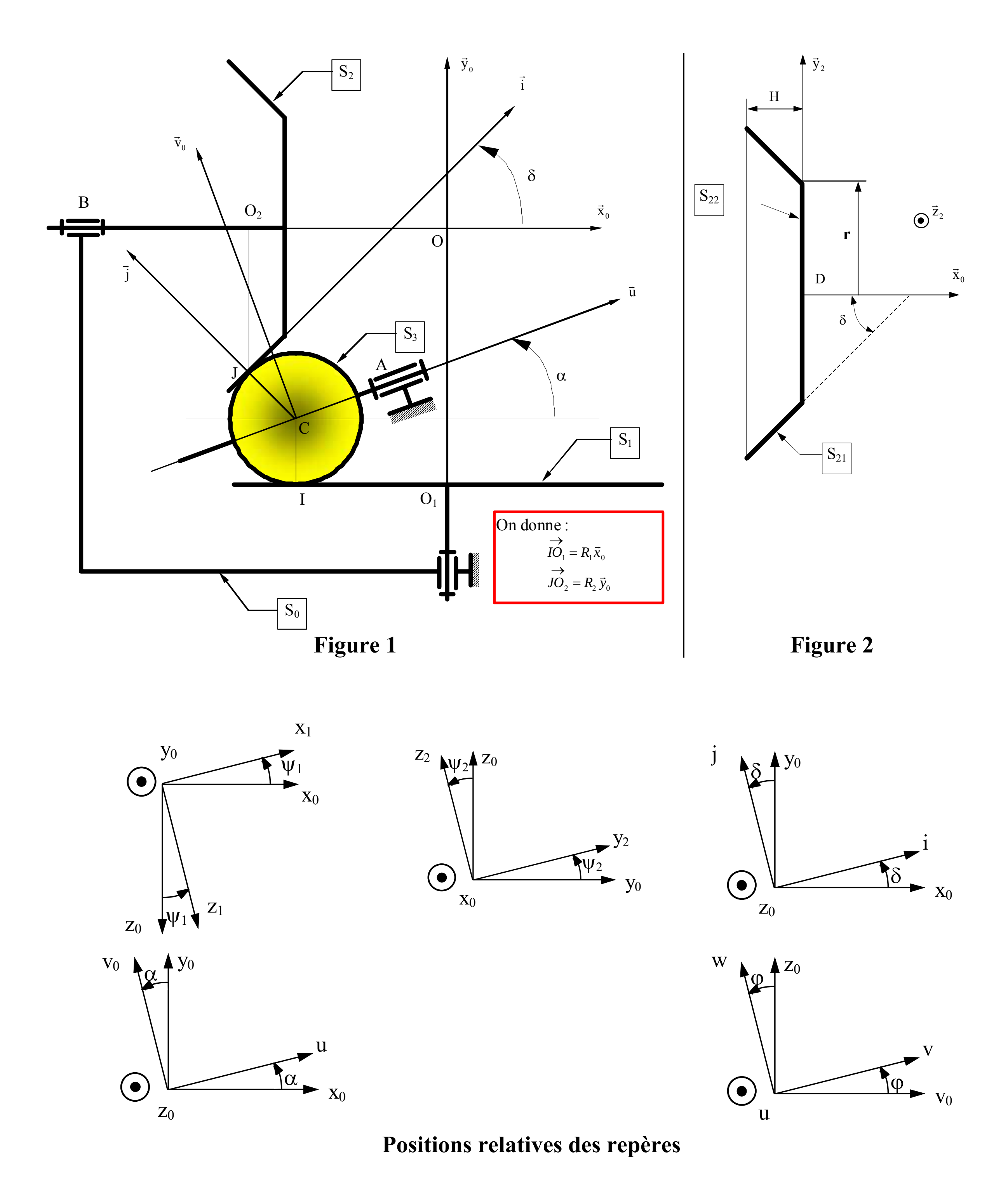


Figure 1 **Figure 2**

Positions relatives des repères

ETUDE D'UN SYSTEME D'EMBRAYAGE

On considère le système d'un embrayage schématisé par la figure 1. Il est constitué :

- D'un bâti fixe **(S_0)**. Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié à **(S_0)**.
- D'un solide **(S_1)** en liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ avec **(S_0)**. Soit $R_1(O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ le repère lié à **(S_1)**.
  On pose $\alpha = (\vec{y},\vec{y}_1) = (\vec{z},\vec{z}_1)$.
- De deux leviers identiques **(S_2)** et **(S_2')** en liaison pivot avec **(S_1)** d'axe $(B,\vec{z}_1)$ et $(B',\vec{z}_1)$. Soit $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_1)$ le repère lié à **(S_2)**. On pose $\beta = (\vec{x},\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$, $\overrightarrow{OB} = r\,\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BA} = L\,\vec{x}_2$. (L et r sont des constantes positives).

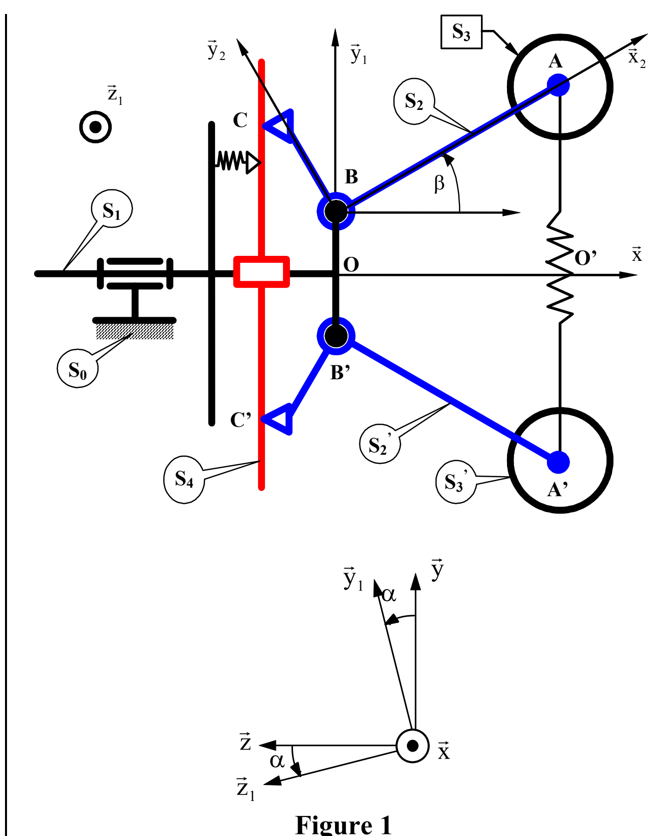


Figure 1

- De deux masselottes **(S_3)** et **(S_3')**.
- D'un plateau mobile (S4) en liaison glissière d'axe $(O,\vec{x})$ par rapport à (S1) et en contact ponctuel en C de normal $(C,\vec{x})$ avec (S2) et en C' de normal $(C',\vec{x})$ avec (S2').

Partie I : Etude cinématique

1) Donner le torseur cinématique du mouvement de **(S_1)** par rapport à **(S_0)** au point B : $\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_B$.

2) Donner le torseur cinématique du mouvement de **(S_2)** par rapport à **(S_1)** au point A : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_A$.

3) Donner le torseur cinématique du mouvement de **(S_2)** par rapport à **(S_0)** au point A : $\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_A$.

Partie II : Géométrie des masses

Le solide **(S_1)** est composé (figure 2) :

- d'un arbre moteur **(S_{11})** assimilé à une tige d'épaisseur négligeable, de longueur **L_1** et de masse **m_1**,
- d'un étrier **(S_{12})** assimilé à une tige d'épaisseur négligeable, de longueur **L_2=2r** et de masse **m_2**,

- d'un plateau **(S_{13})** assimilé à un disque d'épaisseur négligeable, de centre **G**, de rayon **R** et de masse **m_3**. On donne $\overrightarrow{OG} = -L_3\,\vec{x}$.

Questions :

1) Déterminer la matrice d'inertie de l'arbre moteur **(S_{11})** au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: $\left[I_O(S_{11})\right]_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$.
2) Déterminer la matrice d'inertie de l'étrier **(S_{12})** au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: $\left[I_O(S_{12})\right]_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$.
3) Déterminer la matrice d'inertie du plateau **(S_{13})** au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: $\left[I_G(S_{13})\right]_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$. En déduire sa matrice d'inertie au point O dans la même base $(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: $\left[I_O(S_{13})\right]_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$.
4) Calculer la matrice d'inertie de tout le solide **(S_1)** au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: $\left[I_O(S_1)\right]_{(\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$.

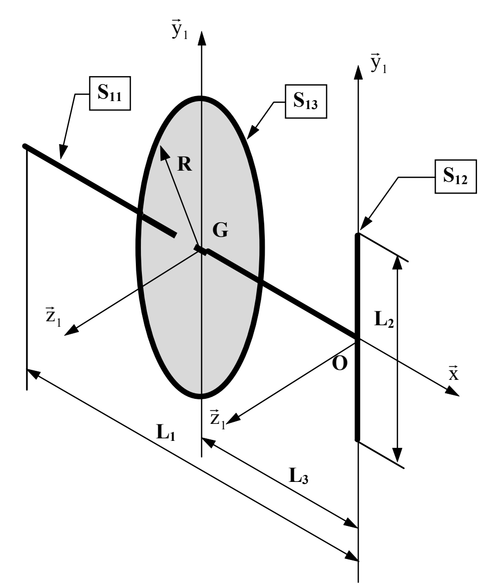


Figure 2 : Schéma du solide (S_1)